

Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de  
Matemática  
8 a 10 de Julho de 2010  
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Leiria

**Oradores Convidados**

- André Neves (Imperial College, Inglaterra)
- Jorge M. Pacheco (Universidade do Minho)
- Liping Ma (Carnegie Foundation for Advancement of Teaching, EUA)
- Mário Jorge Edmundo (Universidade Aberta)
- Robin J. Wilson (Open University e Oxford University, Inglaterra)

**Comissão Científica**

- Fernando Ferreira (FC-UL)
- Filipe Oliveira (FCT-UNL)
- João Pimentel Nunes (IST-UTL)
- José Ferreira Alves (FC-UP)
- José Miguel Urbano (FCT-UC)

**Comissão Organizadora**

- Ana Cristina Lemos (ESTG-IPLeiria)
- Ana Isabel Mendes (ESTG-IPLeiria)
- Fernando Sebastião (ESTG-IPLeiria)
- Helena Ribeiro (ESTG-IPLeiria)
- Joana Teles (FCT-UC)
- Nelson Ferreira (ESTG-IPLeiria)
- Paula Faria (ESTG-IPLeiria)

## Sessões Temáticas

- III e V. Álgebra e Combinatória – António Guedes de Oliveira (FC-UP)
- I, II e III. Análise e Equações com Derivadas Parciais – Luísa Mascarenhas (FCT-UNL)
- III e VI. Geometria e Topologia – Rui Loja Fernandes (IST-UTL)
- III-V. Matemática nas Ciências e Tecnologia – Paula Oliveira (FCT-UC)
- IV e V. Sistemas Dinâmicos – João Lopes Dias (ISEG-UTL)
- I – VIII. Ensino da Matemática – Paula Faria (ESTG-IPLeiria)
- IV e V. História da Matemática – Luís Saraiva (FC-UL), com a colaboração do Seminário Nacional de História da Matemática
- I-IV. Investigação Operacional – Joaquim João de Alarcão Júdice (FCT-UC), com a colaboração da Associação Portuguesa de Investigação Operacional
- I, II, IV-VI. Probabilidades e Estatística – Manuela Neves (ISA-UTL), com a colaboração da Sociedade Portuguesa de Estatística

## Curso Acreditado

1. Matemática com Quadros Interactivos – Carlos Manuel Ferreira Pereira dos Santos; Hilda de Pablo Leonardo (Centro de Formação da SPM)
2. Matemática no Excel – Alda Cristina Jesus Valentim Nunes de Carvalho; Carlos Manuel Ferreira Pereira dos Santos (Centro de Formação da SPM)
3. Geometria Plana – Pedro Manuel Leal Alberto (Centro de Competência “Entre Mar e Serra”)
4. Sensores e Modelação – Maria da Conceição Ferreira dos Santos (Centro de Competência “Entre Mar e Serra”)

# Índice

<b>1</b>	<b>Programa</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mat–Oeste</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Mesas Redondas</b>	<b>7</b>
3.1	Ensino: “O Ensino da Matemática Elementar” . . . . .	7
3.2	Investigação: “Topologia em Baixa Dimensão” . . . . .	7
3.3	Divulgação: “Experiências na Popularização da Matemática” . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Plenárias</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Sessões Temáticas</b>	<b>12</b>
5.1	Álgebra e Combinatória . . . . .	12
5.2	Análise e Equações com Derivadas Parciais . . . . .	18
5.3	Geometria e Topologia . . . . .	27
5.4	Matemática nas Ciências e Tecnologia . . . . .	31
5.5	Sistemas Dinâmicos . . . . .	39
5.6	Ensino da Matemática . . . . .	43
5.7	História da Matemática . . . . .	76
5.8	Investigação Operacional . . . . .	82
5.9	Probabilidades e Estatística . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Curso Acreditado</b>	<b>116</b>
6.1	Introdução . . . . .	116
6.2	Sessões Mat–Oeste . . . . .	117
6.3	Cursos de Formação . . . . .	118



# 1 Programa

**8 de Julho, 5<sup>a</sup> feira**

09:00-09:30 Registo e entrega de documentação

09:30-13:00 3.º Mat-Oeste

09:30-09:50 Abertura do Mat-Oeste

09:50-10:30 Paulo Almeida (Universidade Técnica de Lisboa)  
*Geometria não Comutativa e Aritmética:  
uma introdução*

10:30-10:45 Café

10:45-11:25 Maria Elfrida Ralha (Universidade do Minho)  
*José Anastácio da Cunha (1744-1787) e os seus  
“Princípios de Geometria tirados dos  
de Euclides:” De onde vimos? Para onde vamos?...*

11:25-12:00 Ana Breda (Universidade de Aveiro)  
*Pavimentações planares e esféricas.  
Simetria: um poder aglutinador*

12:00-13:00 Sessão de posters da 2.<sup>a</sup> edição do Prémio  
Doutor Pedro Matos

13:00-14:30 Almoço

14:30-15:00 Abertura do ENSPM10

15:00-15:40 Liping Ma (Carnegie Foundation for Advancement of  
Teaching, EUA): *Arithmetic in Mathematics  
Education: An Abandoned Arena?*

15:45-16:30 Mesa redonda de Ensino: *O Ensino da Matemática  
Elementar*

16:30-17:00 Café  
17:00-18:15 Sessão temática: I  
18:15-19:00 Entrega do Prémio Doutor Pedro Matos  
19:00-20:30 Porto de Honra no Castelo de Leiria

**9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira**

9:00-10:00 Jorge M. Pacheco (Universidade do Minho):  
*Dinâmica Estocástica de Células Hematopoiéticas*  
10:00-10:20 Café  
10:20-11:35 Sessão temática: II  
11:35-11:45 Intervalo  
11:45-13:00 Sessão temática: III  
13:00-14:30 Almoço  
14:30-15:10 André Neves (Imperial College, Inglaterra):  
*Curvatura escalar positiva em variedades de dimensão três*  
15:15-16:00 Mesa redonda de Investigação: *Topologia em Baixa Dimensão*  
16:00-16:30 Café  
16:30-17:45 Sessão temática: IV  
17:45-19:00 Feira de Autores  
20:00 Jantar do ENSPM10

**10 de Julho, Sábado**

- 9:00-10:00 Mário J. Edmundo (Universidade Aberta):  
*Lógica e Estruturas Analíticas*
- 10:00-10:20 Café
- 10:20-11:00 Robin Wilson (Open University e Oxford University,  
Inglaterra): *Communicating mathematics—a historical  
and personal journey*
- 11:05-11:50 Mesa redonda de Divulgação: *Experiências na  
Popularização da Matemática*
- 11:50-13:00 Assembleia Geral da SPM
- 13:00-14:30 Almoço
- 14:30-15:45 Sessão temática: V\*/VII
- 15:45-16:00 Intervalo
- 16:00-17:15 Sessão temática: VI/VIII
- 17:15-18:30 Beberete

---

\*A sessão temática V de ensino inicia-se às 14h15.

## 2 Mat–Oeste

8 de Julho, 5<sup>a</sup> feira

09:50-10:30 Paulo Almeida (Universidade Técnica de Lisboa):  
*Geometria Não Comutativa e Aritmética: uma introdução*

10:45-11:25 Maria Elfrida Ralha (Universidade do Minho):  
*Geometria José Anastácio da Cunha (1744-1787)*  
*e os seus “Princípios de Geometria tirados*  
*dos de Euclides:” De onde vimos? Para onde vamos?...*

11:25-12:00 Ana Breda (Universidade de Aveiro):  
*Pavimentações planares e esféricas.*  
*Simetria: um poder aglutinador*

12:00-13:00 Sessão de posters da 2.<sup>a</sup> edição do Prémio Doutor  
Pedro Matos



## GEOMETRIA NÃO COMUTATIVA E ARITMÉTICA: UMA INTRODUÇÃO

**Paulo Almeida**

IST–Universidade Técnica de Lisboa

A geometria não comutativa, essencialmente desenvolvida por Alain Connes (n.1947), visa uma descrição meramente algébrica das noções geométricas usuais, permitindo estender essas noções mesmo quando não seja possível recorrer às noções tradicionais de espaço, em geral concebido como um “receptáculo de pontos”. Isso tornou possível uma transferência das ideias geométricas a domínios onde essas concepções de espaço estão ausentes, como é o caso da *aritmética*.

## JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA (1744-1787) E OS SEUS “PRINCÍPIOS DE GEOMETRIA TIRADOS DOS DE EUCLIDES:” DE ONDE VIMOS? PARA ONDE VAMOS?...

**Maria Elfrida Ralha**

CMAT/Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade de Minho

A renovação filosófica do século XVII na Europa (Bacon e Descartes) é-nos frequentemente apresentada como não tendo chegado a Portugal por causa das doutrinas perfilhadas pelo ensino dos Jesuítas. Sabemos, actualmente, que nem essas directivas de ensino, ainda que tivessem existido, nem os poderes da Inquisição conseguiram efectivamente impedir que, durante o século XVIII, obras como as de Hobbes e de Locke ou escritos dos enciclopedistas franceses Voltaire, Rousseau ou Diderot (assim como outros textos de autores menos conceituados mas igualmente “subversivos”), chegassem a Portugal e fossem lidos por pessoas como José Anastácio da Cunha (1744-1787).

O jovem José Anastácio da Cunha pôde, nos idos tempos setecentistas, garantidamente usufruir de um sistema escolar de cariz pedagógico reformador, articulado com práticas lectivas marcadamente experimentalistas e modernas e com acesso a bibliotecas muito bem equipadas. Mais tarde, sob o comando do Marechal general Conde de Lippe, encontrou a disciplina, a ordem e a coesão social através de uma formação onde eram rigorosamente definidos as leituras e os planos de estudos de aulas de engenharia militar.

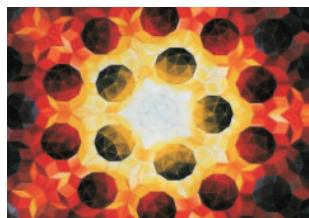
Por provisão de 5 de Outubro de 1773, José Anastácio da Cunha foi nomeado lente de Geometria da recém formada *Faculdade de Mathematica* (1<sup>a</sup> no mundo), na Universidade de Coimbra. Em 20 de Abril de 1776 - fiel ao estipulado nos novos *Estatutos* - José Anastácio da Cunha propôs, à Congregação de Matemática, um seu tratado *Compêndio dos Elementos de Geometria, por um método mais fácil para os estudantes aprenderem* e que “ella mandou examinar pelos outros vogaes” sem que, no entanto, se conheça qualquer resposta.

Entre as obras matemáticas inéditas recentemente encontradas pela autora desta apresentação, destacamos os seus ***Princípios de Geometria tirados dos de Euclides***: Trata-se de um manuscrito, riquíssimo em detalhes, que nos permite conhecer mais de perto a personalidade e a cultura de José Anastácio da Cunha, mas que também nos oferece indicações preciosas do rigor matemático/geométrico.

## PAVIMENTAÇÕES PLANARES E ESFÉRICAS. SIMETRIA: UM PODER AGLUTINADOR

**Ana Breda**

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro



O que está para além da beleza de um padrão? Como escrutinar regras no meio do que parece ser anárquico? Nesta palestra convidamo-lo a uma digressão por determinadas classes de pavimentações do plano, da esfera e, sempre que se considere oportuno, do plano hiperbólico. Num mundo de formas, beleza e magia muito há ainda por explorar ... .. e a exploração pode começar quando se é ainda uma criança.

### 3 Mesas Redondas

#### 3.1 Ensino: “O Ensino da Matemática Elementar”

- Ana Breda (Universidade de Aveiro)
- Isabel Hormigo (Escola Sec. D. Filipa de Lencastre)
- Liping Ma (Carnegie Foundation for Advancement of Teaching, EUA)
- Miguel Galrinho (IST-Universidade Técnica de Lisboa)
- Moderador: Nuno Crato (SPM/ISEG-Universidade Técnica de Lisboa)

#### 3.2 Investigação: “Topologia em Baixa Dimensão”

- André Neves (Imperial College, Inglaterra)
- Marco Mackay (Universidade do Algarve)
- Moderador: Miguel Abreu (IST-Universidade Técnica de Lisboa)

#### 3.3 Divulgação: “Experiências na Popularização da Matemática”

- Carlos Fiolhais (Universidade de Coimbra)
- Moderador: Jorge Buescu (FC-Universidade de Lisboa)
- Maria do Céu Soares (Universidade Nova de Lisboa)
- Robin J. Wilson (Open University e Oxford University, Inglaterra)

## 4 Plenárias

8 de Julho, 5ª feira

15:00-15:40 Liping Ma (Carnegie Foundation for Advancement of Teaching, EUA): *Arithmetic in Mathematics Education: An Abandoned Arena?*

9 de Julho, 6ª feira

9:00-10:00 Jorge M. Pacheco (Universidade do Minho):  
*Dinâmica Estocástica de Células Hematopoiéticas*

14:30-15:10 André Neves (Imperial College, Inglaterra):  
*Curvatura escalar positiva em variedades de dimensão três*

10 de Julho, Sábado

9:00-10:00 Mário Jorge Edmundo (Universidade Aberta):  
*Lógica e Estruturas Analíticas*

10:20-11:00 Robin J. Wilson (Open University e Oxford University, Inglaterra): *Communicating mathematics—a historical and personal journey*

## ARITHMETIC IN MATHEMATICS EDUCATION: AN ABANDONED ARENA?

**Liping Ma**

Carnegie Foundation for Advancement of Teaching, EUA

In elementary mathematics education, arithmetic is often viewed as negligible, sometimes even with pity and disdain-like Cinderella in her stepmother's house. Many people seem to believe that arithmetic is only composed of a multitude of "math facts" and a handful of algorithms. If some voices want to argue that there are more than math facts and algorithms in arithmetic, they may mention that it also contains the meanings of the four basic operations-addition means putting together, subtraction means taking away, multiplication is repeated addition and division is repeated subtraction. Who would expect that the intellectual demand for learning such a subject actually is challenging and exciting? People seeking more "intellectually-demanding" mathematics for our young students look beyond arithmetic to probability and geometry. From my perspective, however, there are significant potentials of arithmetic in mathematics education that are usually overlooked. I would like to share with you some of my observations.

## DINÂMICA ESTOCÁSTICA DE CÉLULAS HEMATOPOIÉTICAS

**Jorge M. Pacheco**

Universidade do Minho

A Hematopoiese é um processo hierárquico que resulta na produção de uma variedade de células com morfologia e funções diferentes. Todas estas células derivam das chamadas células estaminais hematopoéticas (HSC) que se dividem lentamente, num processo em que a auto-renovação coexiste com a diferenciação por forma a dar origem a todos os tipos de células sanguíneas. Este processo é altamente complexo e auto-regulado, envolvendo a resposta a sinais oriundos de citocinas e diversos factores de crescimento. Nesta palestra discutirei um modelo matemático para a hematopoiese baseado num compartimento estocástico da divisão celular. Serão introduzidos múltiplos compartimentos que identificam o estadio de maturação celular. Apesar de ser um modelo muito simples, o mesmo conduz a um bom acordo com o que se sabe da hematopoiese, recolhido através de uma panóplia de dados laboratoriais independentes. Não só o modelo é capaz de explicar o funcionamento normal da hematopoiese, como ainda é capaz de explicar a etiologia de várias doenças, que serão discutidas na palestra.

## CURVATURA ESCALAR POSITIVA EM VARIEDADES DE DIMENSÃO TRÊS

**André Neves**

Imperial College, Inglaterra

Um dos maiores resultados em Geometria Diferencial nos últimos 30 anos foi a descoberta das restrições que a existência de superfícies mínimas impõe na curvatura escalar da variedade ambiente. Por exemplo, é sabido que um torus de dimensão três não admite nenhuma métrica de curvatura escalar não negativa para além da Euclideana (Schoen-Yau). Na minha palestra vou falar de resultados análogos para variedades que admitem métricas de curvatura escalar positiva.

## LÓGICA E ESTRUTURAS ANALÍTICAS

**Mário Jorge Edmundo**

Universidade Aberta

As estruturas o-minimais são uma classe de estruturas lógicas que generalizam estruturas clássicas tais como o corpo dos números reais (geometria semi-algébrica) e o corpo dos números reais expandido com restrições de funções globalmente analíticas (geometria sub-analítica). Os métodos da teoria de modelos introduzem neste contexto real analítico uma abordagem uniforme bem como, em alguns casos, novas ferramentas para a resolução de problemas clássicos. Nesta comunicação, depois de uma breve introdução a este assunto, apresentaremos alguns resultados recentes da teoria de feixes o-minimais que generaliza a teoria de feixes na geometria real algébrica (Delfs) e a teoria de feixes sub-analíticos (Kashiwara-Schapira *et al.*).

COMMUNICATING MATHEMATICS – A HISTORICAL AND  
PERSONAL JOURNEY**Robin J. Wilson**

Open University e Oxford University, Inglaterra

For the past forty years I have attempted to communicate mathematics to a wide range of audiences - through teaching at the Open University and elsewhere, public lectures, books, articles, television, and other means. This illustrated lecture explores these in the context of the wide range of ways in which mathematics has been communicated over the past 4000 years.

## 5 Sessões Temáticas

### 5.1 Álgebra e Combinatória

Org. **António Guedes de Oliveira** (FC-UP)  
agoliv@fc.up.pt

**9 de Julho, 6ª feira, 11h45-13h00** (Sessão temática III)

11h45-12h05 Pedro V. Silva: *Pontos fixos de Endomorfismos*

12h10-12h30 Olga Azenhas: *Números de Littlewood-Richardson e Simetrias*

12h35-13h00 Carlos André: *Caracteres, Supercaracteres e Partições*

**10 de Julho, Sábado, 14h30-15h45** (Sessão temática V)

14h30-14h45 Paula Catarino: *Os Números de Lucas e de Fibonacci em (alguns) semigrupos (finitos) de transformações*

14h50-15h05 Ricardo Mamede: *Bijecções entre partições que não cruzam e partições que não encaixam*

15h10-15h25 Inês Margarida Rodrigues Pais da Silva Borges: *Acções irreduzíveis de Álgebras de Hopf*

15h30-15h45 Teresa Maria Jerónimo Sousa: *Decomposições de grafos em grafos Friendship*



## PONTOS FIXOS DE ENDOMORFISMOS

**Pedro V. Silva**

Universidade do Porto

Em 1984 Gersten provou que o subgrupo dos pontos fixos de um automorfismo de um grupo livre de dimensão finita é finitamente gerado. Foi o início de toda uma linha de investigação em que convergem álgebra, combinatória, teoria de autómatos, geometria algébrica e sistemas dinâmicos. Obtiveram-se resultados envolvendo majoração da dimensão, construtibilidade, endomorfismos, pontos fixos infinitos no completamento hiperbólico, classificação dos pontos fixos e muitos outros aspectos. Veremos como a abordagem combinatória proporcionada pela teoria de autómatos tem permitido estender vários destes resultados a classes mais alargadas de grupos e monóides, e obter novos resultados para os próprios grupos livres.

## NÚMEROS DE LITTLEWOOD-RICHARDSON E SIMETRIAS

**Olga Azenhas**

Universidade de Coimbra

Os números (coeficientes) de Littlewood-Richardson são inteiros não negativos que dependem de três partições  $(\lambda, \mu, \nu)$ . Eles aparecem como coeficientes, por exemplo, na expansão linear do produto de dois polinómios de Schur, na decomposição do produto de duas classes de Schubert ou ainda na decomposição do produto tensorial de duas representações polinomiais irredutíveis do grupo linear. Por outro lado, eles também enumeram diversos objectos combinatórios como LR tableaux, puzzles de Knutson-Tao-Woodward e mosaicos de Purbhoo, entre outros.

Estes números obedecem a doze simetrias no sentido em que são invariantes para a transposição simultânea das partições  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  e permutações de  $(\lambda, \mu, \nu)$ . Seis delas são fáceis de exhibir em qualquer um dos modelos acima mencionados, constituindo um subgrupo de índice 2 do grupo diedral de ordem doze. As seis restantes simetrias fora deste subgrupo, escondidas em qualquer um dos modelos mencionados, são descritas por um único gerador que as reduz à involução de Schützenberger.

## CARACTERES, SUPERCARACTERES E PARTIÇÕES

**Carlos André**

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

O estudo das permutações de um conjunto com  $n$  elementos desenvolveu áreas importantes de investigação em Matemática. A estrutura do grupo simétrico (formado por todas estas permutações) é bem conhecida. Por exemplo, agrupando permutações “semelhantes” (de acordo com certas regras) obtemos uma estrutura algébrica muito rica que permite respostas adequadas a diversos problemas: sobre polinómios em indeterminadas comutativas, sobre certas classes de operadores em produtos tensoriais, ou sobre o modo de embaralhar cartas de jogar garantindo uma distribuição uniforme. Os métodos usados dependem fortemente do comportamento das funções que tomam o mesmo valor complexo para todas as permutações que sejam semelhantes. Estas funções formam uma base de uma álgebra “combinatorial” que possui uma base indexada por partições do número natural  $n$  e que é constituída pelos caracteres das representações irredutíveis do grupo simétrico. Em muitas outras situações, podemos agrupar certos objectos de acordo com certos padrões de semelhança e estudar funções de valores complexos que respeitem estes padrões. Neste seminário, apresentaremos uma destas situações explorando o “paralelismo” que se obtém quando substituímos as partições de  $n$  pelas partições do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  e os caracteres do grupo simétrico pelos supercaracteres de um grupo apropriado. Em particular, mencionaremos algumas relações descobertas recentemente com polinómios simétricos em indeterminadas não comutativas.

## OS NÚMEROS DE LUCAS E DE FIBONACCI EM (ALGUNS) SEMIGRUPOS (FINITOS) DE TRANSFORMAÇÕES

Paula Catarino<sup>1</sup>

Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Como se observa em [7], os semigrupos de transformações estão para a Teoria de Semigrupos assim como os grupos simétricos estão para a Teoria de Grupos. Vários autores dedicaram o seu estudo a certo tipo de semigrupos (finitos) de transformações: semigrupos das transformações totais, semigrupos das transformações parciais e semigrupos das transformações parciais injectivas, sobre uma cadeia (finita). Existem inúmeros trabalhos contendo o estudo de propriedades algébricas importantes de alguns destes semigrupos. Veja-se, a título meramente ilustrativo, por exemplo, [5], [6], [8], [4], [3], [1] e [2], entre outros. No estudo das mais variadas classes de semigrupos (finitos) de transformações e no que respeita ao estudo de algumas das suas propriedades algébricas, existem resultados interessantes do ponto de vista combinatório, que estão relacionados com os números de Lucas e de Fibonacci.

Nesta comunicação, efectuaremos uma sinopse de (alguns) dos resultados que usam a combinatória no estudo de (alguns) destes semigrupos (finitos) de transformações de uma cadeia (finita) em si mesma.

**Palavras-chave:** semigrupo, idempotente, transformação total, transformação parcial, transformação isótona, transformação que preserva a orientação, transformação que inverte a orientação.

## Referências

- [1] Catarino, P. M., Monoids of orientation-preserving mappings of a finite chain and their presentation, *Semigroups and Applications*, eds. J.M. Howie and N. Ruškuc, Proceedings of the Conference in St. Andrews, Scotland, (1997), World Scientific, (1998), 39-46.

---

<sup>1</sup>O autor é colaborador das seguintes unidades de investigação:  
CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações,  
Universidade de Aveiro, Portugal;  
CM - UTAD - Centro de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro,  
Portugal.

- [2] Catarino, P. M. and Higgins, P. M., The monoid of orientation-preserving mappings on a chain, *Semigroup Forum* **58**, (1999), 190-206.
- [3] Gonçalves, S. M., Semigroups of injective linear transformations with infinite defect, *Comm. Algebra*, Vol. **34**, (2006), 289-302.
- [4] Higgins, P. M., Combinatorial results for semigroups of order-preserving mappings, *Math. Proc. Phil. Soc.*, Vol. **113**, (1993), 281-296.
- [5] Howie, J. M., The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformations semigroup, *J. London Math. Soc.* **41**, (1966), 707-716.
- [6] Howie, J. M., Products of idempotents in certain semigroups of transformations, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **2**, **17**, (1971), 223-236.
- [7] Sullivan, R. P., Transformation semigroups: past, present and future, *Proceedings of International Conference on Semigroups (University of Minho, Portugal, June 1999)*, ed. P. Smith, P. Mendes and E. Giraldez, World Scientific, Singapore, (2000), 191-243.
- [8] Umar, A., On the semigroups of order-decreasing finite full transformations, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **120A**, (1992), 129-142.

## BIJEÇÕES ENTRE PARTIÇÕES QUE NÃO CRUZAM E PARTIÇÕES QUE NÃO ENCAIXAM

**Ricardo Mamede**

CMUC e Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

O número de partições do tipo  $T$  que não cruzam é o  $n$ -ésimo número de Catalan  $(1/(n+1))C(2n, n)$  quando  $T = A_{n-1}$ , o coeficiente binomial  $C(2n, n)$  quando  $T = B_n$  ou  $C_n$  e a diferença  $C(2n, n) - C(2(n-1), n-1)$  quando  $T = D_n$ , e esses números coincidem com o correspondente número de partições que não encaixam. Nesta comunicação descrevemos bijecções entre partições que não cruzam e partições que não encaixam para todos os grupos de Weyl clássicos.

## ACÇÕES IRREDUTÍVEIS DE ÁLGEBRAS DE HOPF

**Inês Margarida Rodrigues Pais da Silva Borges**

iborges@iscac.pt

ISCAC, Coimbra

Um teorema de Bergen, Cohen e Fishman afirma que se uma Álgebra de Hopf  $H$  age finitamente sobre uma Álgebra módulo  $A$  com dimensão de Goldie finita, tal que  $A$  é um módulo simples sobre  $A\#H$ , então  $A$  tem dimensão finita como espaço vectorial sobre o subanel dos invariantes  $A^H$ . O argumento principal usado na prova do referido teorema é o teorema da densidade de Jacobson. Nesta palestra, iremos estender este resultado a uma determinada Álgebra de operadores, usando para tal teoremas da densidade de Julius Zelmanowitz.

## DECOMPOSIÇÕES DE GRAFOS EM GRAFOS FRIENDSHIP

**Teresa Maria Jerónimo Sousa**

tmjs@fct.unl.pt

Departamento de Matemática, FCT-UNL e CMA-UNL

Um grafo composto por  $t$  grafos completos que partilhem um vértice  $v$  diz-se um grafo  $t$ -friendship com centro  $v$ . Um grafo diz-se friendship se for  $t$ -friendship para algum  $t \geq 1$ .

Estudamos quais o grafos de ordem  $n$  que requerem o maior número de elementos numa decomposição  $(r)$ -friendship. Para  $r = 2$  mostramos que qualquer grafo de ordem  $n$  admite uma decomposição 2-friendship com um máximo de  $\lceil n^2/8 \rceil$  elementos se  $n$  é par e no máximo  $(n^2 - 1)/8$  elementos se  $n$  é ímpar. Estes resultados são os melhores possíveis. Resultados exactos para decomposições 3-friendship serão também apresentados. O caso geral de decomposições  $t$ -friendship, para  $t \geq 4$ , será resolvido assintoticamente.

Terminaremos esta apresentação com resultados sobre decomposições de grafos em grafos friendship. Os resultados apresentados evidenciam ligações deste problema com o estudo dos números de Ramsey.

## 5.2 Análise e Equações com Derivadas Parciais

Org. **Luísa Mascarenhas** (FCT-UNL)  
mlfm@fct.unl.pt

### 8 de Julho, 5<sup>a</sup> feira, 17h00-18h15 (Sessão temática I)

17h00-17h15 Ana Bela Cruzeiro: *Fluxos Lagrangianos estocásticos para a equação de Navier-Stokes em variedades de Riemann*

17h20-17h35 Milton Ferreira: *Inversão da transformada de Radon em  $SO(3)$  através de átomos de Gabor e princípios de recuperação esparsa*

17h40-17h55 Ana Margarida Ribeiro: *Relaxation results in image decomposition*

18h00-18h15 Eurica Henriques: *Sobre a equação dos meios porosos*

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 10h20-11h35 (Sessão temática II)

10h20-10h40 Filipa Caetano: *Decomposição de domínios para equações de reacção-difusão não lineares*

10h45-11h05 N. D. Lopes, P. J. S. Pereira e L. Trabuco: *Um método numérico para uma classe de equações do tipo Boussinesq para ondas de superfície na água com batimetria dependente do tempo*

11h10-11h35 Rita Ferreira: *Análise espectral de um problema de homogeneização com redução dimensional*

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 11h45-13h00 (Sessão temática III)

11h45-12h05 João-Paulo Dias: *Some new results for a Schrödinger-KdV system*

12h10-12h30 Paulo Amorim: *Estimativas de erro para leis de conservação hiperbólicas sobre variedades*

12h35-13h00 Joaquim M. C. Correia: *Simplifying Some Dissipative-Dispersive Models*

## FLUXOS LAGRANGIANOS ESTOCÁSTICOS PARA A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES EM VARIEDADES DE RIEMANN

**Ana Bela Cruzeiro**

GFM/UL e IST/UTL

Construímos trajectórias Lagrangianas estocásticas e estudamos as suas propriedades de estabilidade. Estas propriedades dependem da intensidade do ruído bem como da métrica escolhida.

## INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE RADON EM $SO(3)$ ATRAVÉS DE ÁTOMOS DE GABOR E PRINCÍPIOS DE RECUPERAÇÃO ESPARSA

**Milton Ferreira**<sup>1</sup>

milton.ferreira@estg.ipleiria.pt

Departamento de Matemática, Escola Superior de Tecnologia e Gestão - IPLeiria

A transformada de Radon em  $SO(3)$  é uma ferramenta de análise de textura cristalográfica importante porque relaciona a função densidade de orientação cristalográfica (ODF) e as funções de densidade de pólos (PDFs) obtidas por experimentação, ver [1, 2]. Assim, a determinação de uma densidade de orientação cristalográfica (ODF) pode ser obtida a partir dos dados de intensidade de pólos (PDFs) através da inversão da transformada de Radon em  $SO(3)$ . Uma vez que o problema é mal-posto vários métodos de inversão (principalmente procedimentos ad hoc) foram estudados no passado para inverter esta transformada de Radon.

Nesta palestra iremos apresentar um novo método numérico para aproximar a inversa da transformada de Radon em  $SO(3)$ . O ponto de partida é a construção de um espaço de fase adequado para expandir funções em  $S^3$  baseado em teoria da representação de grupos. Definiremos uma transformada de Gabor em  $L^2(S^3)$  que nos permitirá construir decomposições atómicas para funções de  $L^2(S^3)$ .

Usando princípios variacionais para reconstruções esparsas obtemos um procedimento numérico iterativo para calcular uma aproximação do

---

<sup>1</sup>Membro do Grupo de Investigação de Análise Complexa e Hipercomplexa do CIDMA, Universidade de Aveiro.

problema inverso.

Apresentaremos exemplos numéricos, relativos à reconstrução de uma função de densidade de orientação para um cristal com simetria triclinica e ortorrômbica, com diferentes níveis de ruído, para mostrar as capacidades de reconstrução do algoritmo proposto.

## Referências

- [1] K.G. v.d. Boogaart, R. Hielscher, J. Prestin e H. Schaeben, *Kernel-based methods for inversion of the radon transform on  $SO(3)$  and their applications to texture analysis*, J. Comput. Appl. Math. **199** (2007), 122-40.
- [2] H. Schaeben, e K.G. v. d. Boogaart, *Spherical harmonics in texture analysis*, Tectonophysics **370** (2003), 253-68.
- [3] P. Cerejeiras, M. Ferreira. U. Khäler, e G. Teschke, *Inversion of the noisy Radon transform on  $SO(3)$  by Gabor frames and sparse recovery principles*, Preprint version: <http://www.dfg-spp1324.de/download/preprints/preprint035.pdf>

## RELAXATION RESULTS IN IMAGE DECOMPOSITION

**Ana Margarida Ribeiro**

FCT/UNL

We provide relaxation results in  $BV \times L^p$ , for

$$I(u, v) = \int_{\Omega} W(x, u, \nabla u) dx + \int_{\Omega} \varphi(x, u, v) dx,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $u \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $W$  and  $\varphi$  continuous functions with linear growth on  $\nabla u$  and  $p$ -growth on  $v$ . Particular cases of these functionals arise in image decomposition through the TV models due to Meyer: given an image  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  one aims to decompose it into two components  $u$  and  $v$ , i.e.  $\phi = u + v$ ,  $u$  being the cartoon representation of  $\phi$ , and  $v$  the oscillatory component, representing texture



and noise. In such models the minimum problems have the form

$$(u, v) \in BV \times G, \phi = u + v \quad \inf \{ |Du|(\Omega) + \|v\|_G \}$$

(with  $G$  a Banach space, suitable for numerics), and

$$\inf_{u \in BV, \|v\|_G \leq \mu} \left\{ |Du|(\Omega) + \frac{1}{2\lambda} \|\phi - u - v\|_{L^2}^2 \right\},$$

( $\mu, \lambda$  scaling factors). In the energy we consider, the total variation  $|Du|(\Omega)$  is replaced by  $\int_{\Omega} W(x, u, \nabla u) dx$ , with  $W$  not quasiconvex, and the fidelity term has the form  $\int_{\Omega} \varphi(x, u, v) dx$ . The lack of semi-continuity of  $I$  requires the relaxation we address in our analysis.

This is a joint work with I. Fonseca and E. Zappale.

## SOBRE A EQUAÇÃO DOS MEIOS POROSOS

**Eurica Henriques**

eurica@utad.pt

Departamento de Matemática da UTAD

CM-UTAD

A equação dos meios porosos

$$u_t - \nabla \cdot (u^m \nabla u) = 0$$

é um exemplo de equação de difusão bem conhecido e estudado e que modela o escoamento (que não depende da direcção) de um fluido num meio poroso.

Supondo que o escoamento acontece de modo diferente para direcções diferentes, temos a equação anisotrópica dos meios porosos. Uma possível modelação é dada por

$$u_t - \sum_{i=1}^N (u^{m_i})_{x_i x_i} = 0 .$$

Mostramos que, ainda neste caso, conseguimos obter continuidade local para a solução.

## DECOMPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS PARA EQUAÇÕES DE REACÇÃO-DIFUSÃO NÃO LINEARES

**Filipa Caetano**

CMA/UNL e Univ. Paris XI, Orsay

Os problemas matemáticos descritos por equações às derivadas parciais estão muitas vezes ligados a modelos de grande complexidade. Para simular numericamente estes problemas são necessários meios computacionais de grande envergadura, do ponto de vista material, e algoritmos numéricos eficientes, do ponto de vista matemático.

Apresentamos uma classe de algoritmos de decomposição de domínios de tipo “Schwarz waveform relaxation” para o cálculo de soluções de determinadas equações de reacção-difusão não lineares. Para equações que dependem do tempo, estes algoritmos permitem separar o problema global em sub-problemas definidos em cada sub-domínio. Do ponto de vista do cálculo numérico, eles são assim adaptados à resolução das equações em paralelo e à utilização de discretizações diferentes nos sub-domínios. Definiremos condições de transmissão não lineares, que são baseadas em problemas de melhor aproximação polinomial para a equação linear. Mostramos que estes algoritmos são bem definidos, convergentes, e apresentaremos resultados numéricos que validam esta aproximação.

## UM MÉTODO NUMÉRICO PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DO TIPO BOUSSINESQ PARA ONDAS DE SUPERFÍCIE NA ÁGUA COM BATIMETRIA DEPENDENTE DO TEMPO

**N. D. Lopes<sup>(a)</sup>, P. J. S. Pereira<sup>(a)</sup> e L. Trabucho<sup>(b)</sup>**

nlopes@dec.isel.ipl.pt, ppereira@deq.isel.ipl.pt, trabucho@fct.unl.pt

<sup>(a)</sup>ISEL Instituto Superior de Engenharia de Lisboa

<sup>(b)</sup>CMAF e Departamento de Matemática FCT/UNL

Este trabalho consiste em duas partes. Em primeiro lugar, apresentamos uma classe de modelos melhorados de quarta e sexta-ordem para simular a propagação e geração de ondas de superfície na água. Os modelos de quarta ordem são derivados com o objectivo de manter algumas características dispersivas dos de ordem superior. Para reduzir

o número de incógnitas, usamos a formulação de elevação de superfície e potencial da velocidade (cf. [1]). Os modelos incorporam efeitos dissipativos. A geração de ondas devido à movimentação do fundo do mar também é considerada.

Em segundo lugar, introduzimos um Método de Elementos Finitos Contínuo/Descontínuo com termos de penalização no interior (cf. [2]) para aproximar as soluções do modelo de Boussinesq de quarta ordem. A discretização das variáveis espaciais é feita usando elementos de Lagrange contínuos  $P_2$  (com derivadas descontínuas ao longo das arestas dos elementos). Para a variável do tempo, usamos um sistema Predictor-Corrector inicializado por um método Runge-Kutta explícito. Para demonstrar a aplicabilidade do modelo, vários casos de teste são apresentados, em particular, a evolução das ondas geradas por um deslizamento de terra submarino (cf. [3]) ou por um movimento impulsivo do fundo (ver Fig. 1).

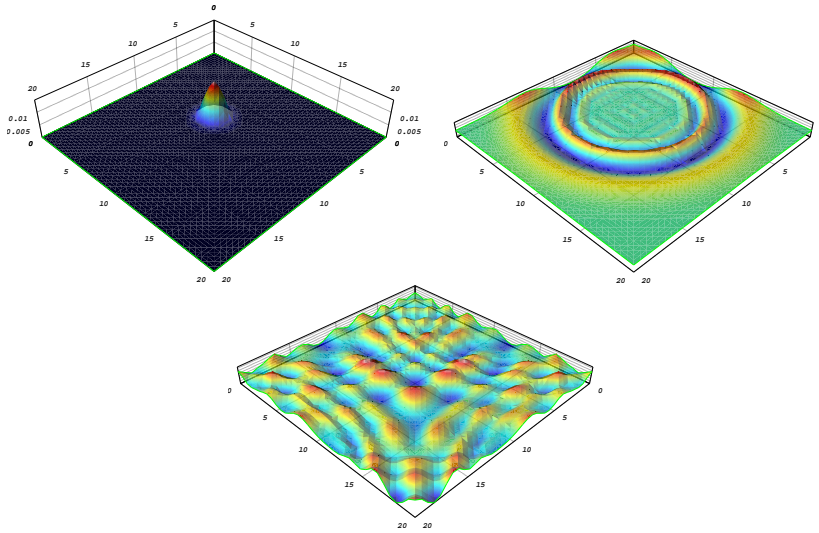


Figura 1: Algumas imagens da elevação de superfície  $\eta$  (m), gerada por um movimento impulsivo do fundo, nos instantes  $t = 0.5$  s,  $t = 5$  s e  $t = 12.5$  s.

## REFERÊNCIAS

- [1] M. Zhao, B. Teng e L. Cheng, A new form of generalized Boussinesq equations for varying water depth, *Ocean Engineering*, 31: 2047–2072, 11 2004.
- [2] G. Engel et Al., Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191(34): 3669–3750, 2002.
- [3] D. R. Fuhrman e P. A. Madsen, Tsunami generation, propagation, and run-up with a high-order Boussinesq model, *Coastal Engineering*, 56: 747–758, 2009.

ANÁLISE ESPECTRAL DE UM PROBLEMA DE  
HOMOGENEIZAÇÃO COM REDUÇÃO DIMENSIONAL**Rita Ferreira**

ICTI e FCT/UNL

Consideramos um problema espectral definido num domínio de fina espessura, com condições de Dirichlet nulas, associado a um operador elíptico com coeficientes periodicamente oscilantes. Este problema é caracterizado por dois parâmetros pequenos: o parâmetro  $\varepsilon > 0$  associado à frequência das oscilações e o parâmetro  $\delta > 0$  associado à espessura do domínio. Apresentamos o comportamento assintótico do espectro quando  $\varepsilon$  e  $\delta$  tendem para zero, distinguindo três casos: o caso em que a frequência das oscilações e a espessura do domínio são da mesma ordem de grandeza ( $\varepsilon \sim \delta$ ), o caso em que a frequência das oscilações é muito maior do que a espessura do domínio ( $\varepsilon \ll \delta$ ) e, finalmente, o caso em que a espessura do domínio é muito menor do que a frequência das oscilações ( $\varepsilon \gg \delta$ ).

## SOME NEW RESULTS FOR A SCHRÖDINGER-GKdV SYSTEM

**João-Paulo Dias**  
CMAF/UL e FCUL

We present some new results, obtained in collaboration with Mário Figueira and Filipe Oliveira, concerning the Cauchy problem and the existence of bound states for a class of coupled nonlinear Schrödinger-gKdV systems.

## ESTIMATIVAS DE ERRO PARA LEIS DE CONSERVAÇÃO HIPERBÓLICAS SOBRE VARIEDADES

**Paulo Amorim**  
Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da UL

Apresentamos alguns resultados recentes sobre a aproximação das soluções de leis de conservação sobre variedades. Após uma revisão dos resultados existentes, válidos no espaço Euclidiano e em variedades Riemannianas, vamos considerar leis de conservação sobre variedades abstractas de dimensão  $(d + 1)$ . Enunciamos o principal resultado, uma estimativa de erro geométrica que controla a diferença entre uma solução exacta e uma solução aproximada da lei de conservação, que não faz intervir nenhuma estrutura adicional sobre a variedade. Colaboração com P.G. LeFloch (Paris) e W. Neves (Rio de Janeiro).

## SIMPLIFYING SOME DISSIPATIVE-DISPERSIVE MODELS

**Joaquim M. C. Correia**  
CIMA e DM da ECT U. Évora, CAMGSD-IST

We are concerned with the balance of dissipative and dispersive effects in nonlinear hyperbolic conservation laws: if we consider such applications as optimal design and dynamic control in structures or martensitic phase transitions in materials, oscillations are fundamental

issues. While diffusion has a dissipative effect, dispersion has an oscillatory one. And, if we want to select the physical solutions, dissipation and dispersion must be properly balanced.

So, the main issue we are interested in is the study of zero dissipation-dispersion limits in order to respond to the questions: “can we replace some given balance law by the, simpler, associated hyperbolic model?” and, “which must be the proper entropy criterium?”

While our arguments establish ‘integrity’ (convergence to classical discontinuous solutions), the major emphasis is on ‘reliability’ (convergence to any physical solution) and ‘failure’ (divergence).

The techniques we use are energy based and depend upon the improved DiPerna’s analytical setting on Young measures.

We aim for a realistic framework, with multi-space dimensional and physical dissipation-dispersion models.

### 5.3 Geometria e Topologia

Org. **Rui Loja Fernandes** (IST-UTL)  
rfern@math.ist.utl.pt

#### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 11h45-13h00 (Sessão temática III)

11h45-12h05 Ana Cristina Ferreira: *Riemannian geometry with skew torsion*

12h10-12h30 Alessia Mandini: *Some results on hyperpolygon spaces*

12h35-13h00 Ana Rita Pires: *Symplectic Origami*

#### 10 de Julho, Sábado, 16h00-17h15 (Sessão temática VI)

16h00-16h20 David Martinez Torres: *Universal models for locally conformal symplectic structures*

16h25-16h45 Rita Martins: *The problem of regularity on the subanalytic site*

16h50-17h15 Margarida Melo: *Compactified jacobians of singular curves*

## RIEMANNIAN GEOMETRY WITH SKEW TORSION

**Ana Cristina Ferreira**

(Departamento de Matemática – Universidade do Minho)

This talk will be concerned with metric connections with skew torsion on a Riemannian manifold. We will briefly mention how this type of connection compares with the Levi-Civita connection. We will also show how to generalize the notion of Einstein metric and present an analogue of the Hitchin-Thorpe inequality. Examples will be given and time permitting we will analyze the moduli space of instantons for a family of Einstein metrics with skew torsion on the 4-sphere.

## SOME RESULTS ON HYPERPOLYGON SPACES

**Alessia Mandini**

(Departamento de Matemática - Instituto Superior Técnico)

In this talk I will describe two classes of spaces, the polygon and hyperpolygon spaces, that arise respectively as Kahler and hyperKahler reduction. In particular, I will illustrate how the geometrical structure of the polygon space  $M(\alpha)$  and of the hyperpolygon space  $X(\alpha)$  depend upon the data of  $n$  real positive numbers, which are the entries of the ‘length vector’  $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ . In both cases the vector  $\alpha$  characterizes the level set where we take the reduction. We will analyze the behavior of the spaces  $M(\alpha)$  and  $X(\alpha)$  when the lengths vector  $\alpha$  crosses a wall in the moment polytope. The analysis is based on the fact that the hyperpolygon space is isomorphic to the moduli space  $\mathcal{H}(\alpha)$  of parabolic Higgs bundles (under suitable restrictions). In fact the wall-crossing problem has been solved by Thaddeus in the case of moduli spaces of parabolic Higgs bundles, where the changes induced by variations of the parabolic weights are described by means of a transformation (called elementary or Mukai transform) which is a generalization of a flip. The isomorphism between  $X(\alpha)$  and  $\mathcal{H}(\alpha)$  allows us to translate Thaddeus’ work to the hyperpolygon space. This is joint work with Leonor Godinho.



## SYMPLECTIC ORIGAMI

**Ana Rita Pires**

(Department of Mathematics - Massachusetts Institute of Technology)

An origami manifold is a manifold equipped with a closed 2-form which is symplectic everywhere except on a hypersurface, where it is a folded form whose kernel defines a circle fibration. In this talk, I will explain how an origami manifold can be unfolded into a collection of symplectic pieces and conversely, how a collection of symplectic pieces can be folded (modulo compatibility conditions), into an origami manifold. Using equivariant versions of these operations, we will see how the classic symplectic results of convexity and classification of toric manifolds translate to the origami world. There will be pictures resembling paper origami but no demonstration on how to fold a paper crane. This is joint work with Victor Guillemin and Ana Cannas da Silva.

UNIVERSAL MODELS FOR LOCALLY CONFORMAL  
SYMPLECTIC STRUCTURES**David Martinez Torres**

(Departamento de Matemática - Instituto Superior Técnico)

Our understanding of locally conformal Kahler (lcK) structures has been much improved in the last ten years. Notably, a Kodaira-Nakano type embedding result has been proved. In this talk we will present some similar results for locally conformal symplectic structures, and show how some of the relations between symplectic and Kahler geometry extend to their conformal counterparts. This is joint work with J.C. Marrero and E. Padron (La Laguna, Tenerife).

## THE PROBLEM OF REGULARITY ON THE SUBANALYTIC SITE

**Ana Rita Martins**

(Faculdade de Engenharia - Universidade Católica Portuguesa)

The algebraic approach to the study of linear partial differential equations (LPDE) consists in considering the equations as sheaves of modules over the ring of linear differential operators on a manifold  $X$ , the so called  $D$ -modules. Moreover, the study of LPDE can be divided in two main types, according with the type of the solutions: regular and irregular. To give an idea of the difference of the two kinds of equations, let us recall that, in the one-dimensional case, the solutions of regular systems have moderate growth while the solutions of irregular systems have exponential-type growth. However, the latter solutions are not defined by local properties and hence cannot be treated in the framework of sheaf theory. To overcome this difficulty, we introduce a Grothendieck topology on  $X$  and work with sheaves on the subanalytic site instead. In this talk we shall explain the problem of regularity in the subanalytic site, motivated by the notion of microsupport, and relate this notion with the classic notion of regularity for  $D$ -modules.

## COMPACTIFIED JACOBIANS OF SINGULAR CURVES

**Margarida Melo**

(Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra)

One of the most important features of algebraic geometry is that often the spaces parameterizing algebro-geometric objects of certain type, moduli spaces, have, again, the structure of an algebraic variety or, more generally, of an algebraic stack. After recalling some classical moduli spaces of algebraic geometry, we will show a construction of a compactification of the universal Picard variety over the moduli space of curves with marked points. Our construction has the important property of yielding, again, a moduli space for algebro-geometric geometric objects that we are able to describe.

## 5.4 Matemática nas Ciências e Tecnologia

Org. **Paula Oliveira** (FCT-UC)  
poliveir@mat.uc.pt

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 11h45-13h00 (Sessão temática III)

11h45-12h05 R.M. Natal Jorge: *Análise de Problemas Incompressíveis*

12h10-12h30 Miguel Patrício: *Modelação da propagação de fendas em materiais compósitos*

12h35-13h00 Jorge F. Oliveira: *Métodos Numéricos na Análise e Simulação de Circuitos Electrónicos não Lineares*

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 16h30-17h45 (Sessão temática IV)

16h30-16h50 Alexandra Moura: *Modelação Matemática e Simulação Numérica do Sistema Cardiovascular*

16h55-17h15 Sílvia Barbeiro: *Simulação Numérica em Modelos Poroelásticos*

17h20-17h45 Henrique A. Almeida e Paulo J. Bártolo: *A Utilização de Superfícies Triplas Periódicas para Aplicações Médicas*

### 10 de Julho, Sábado, 14h30-15h45 (Sessão temática V)

14h30-14h50 Gonçalo Pena: *Numerical Simulation of the Incompressible Navier-Stokes Equations in a Moving Domain: Application to Hemodynamics*

14h55-15h15 Miguel Belbut Gaspar: *Construção de Trajectórias de Varrimento Linear para Fabricação Rápida*

15h20-15h45 Paula Faria e Alberto Leal: *The Importance of Numerical Analysis on the Optimization of Transcranial Direct Current Stimulation*

## ANÁLISE DE PROBLEMAS INCOMPRESSÍVEIS

**R. M. Natal Jorge**

rnatal@fe.up.pt

IDMEC - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

A aplicação de métodos numéricos a problemas de comportamento incompressível, ou quase incompressível, tem-se revelado como uma fonte de problemas, tanto no método dos elementos finitos, como noutros mais recentemente propostos. Um dos primeiros e dos principais problemas prende-se com o fenómeno da retenção, ou bloqueamento (locking) detectado em situações distintas, tais como, elasticidade linear e não linear, problemas que envolvem deformações plásticas, escoamento incompressível de fluidos viscosos, etc.

No presente trabalho apresentar-se-á o referido problema em aplicações e formulações distintas apresentando-se soluções alternativas e recentemente propostas.

## MODELAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE FENDAS EM MATERIAIS COMPÓSITOS

**Miguel Patricio**

miguel.patricio@estg.ipleiria.pt

Instituto Politécnico de Leiria

Centro de Matemática da Universidade de Coimbra

O uso de compósitos tem aumentado, sendo estes encontrados em várias estruturas como componentes de carros de corrida, aviões, ou outras aplicações que requeiram materiais leves mas resistentes. Tipicamente, compósitos são idealizados para resistir a condições extremas, que poderão conduzir ao surgimento e posterior propagação de fendas.

Pretende-se analisar o problema da predição do crescimento de fendas em materiais compósitos, altamente heterogéneos e periodicamente distribuídos. Dependendo da escala à qual o problema é considerado, diferentes pontos de vista podem ser adoptados. A estratégia mais simples advém de observar o material à escala macroscópica. É então assumido que a propagação ocorre num material homogéneo e estamos dentro do âmbito da mecânica da fractura linear elástica.

Quando a escala dos constituintes é considerada, os compósitos têm uma estrutura complexa. Neste caso, os problemas de elasticidade que

será necessário resolver para obter a distribuição de tensões na vizinhança da ponta da fenda requerem a introdução de técnicas adequadas, como a teoria da homogenização ou a decomposição de domínios.

Um procedimento híbrido combinando as técnicas anteriores permite-nos olhar para o problema da propagação de fendas à escala dos constituintes na vizinhança da ponta da fenda e à escala macroscópica no restante domínio computacional. Podemos assim estabelecer algoritmos para analisar a propagação de fendas em materiais com microestruturas, tomando em consideração aspectos como a interacção das fendas com as fronteiras internas do material.

## MÉTODOS NUMÉRICOS NA ANÁLISE E SIMULAÇÃO DE CIRCUITOS ELECTRÓNICOS NÃO LINEARES

**Jorge F. Oliveira**

oliveira@estg.ipleiria.pt

Departamento de Engenharia Electrotécnica,

Escola Superior de Tecnologia e Gestão - IPLeiria

A simulação computacional do funcionamento de circuitos electrónicos tem assumido um papel cada vez mais importante nesta área, na medida em que ajuda o projectista na concepção e design de novos circuitos, possibilita a sua correcção e o melhoramento do seu desempenho sem necessidade de recorrer ao fabrico sucessivo de protótipos, levando assim a uma poupança de tempo e a uma redução de custos.

O processo de simulação de um circuito pressupõe a obtenção dos modelos comportamentais dos dispositivos electrónicos constituintes desse circuito, a obtenção do sistema de equações diferenciais que descreve o seu comportamento dinâmico no domínio do tempo e a resolução numérica desse sistema.

Nesta comunicação serão apresentadas algumas das principais estratégias utilizadas para a análise da resposta em regime transitório, bem como da resposta em regime estacionário. Assim, no âmbito da análise da resposta transitória, a qual conduz à formulação e resolução de um problema de valor inicial, será feita uma breve alusão à estratégia de integração de sistemas diferenciais ordinários passo-a-passo no tempo, usando para tal métodos lineares de passo múltiplo ou métodos de Runge-Kutta. Relativamente à análise da resposta

em regime estacionário, a qual corresponde tipicamente à resolução de um problema de condição de fronteira com condições de fronteira periódicas, serão apresentados de uma forma muito sucinta os métodos mais usados pelos simuladores comerciais para o efeito, tais como o método de “Shooting” ou o método do Balanço Harmónico. O primeiro é muito útil para problemas acentuadamente não lineares, sendo bastante usado em circuitos de electrónica analógica, enquanto que o segundo é mais apropriado para circuitos com não linearidades moderadas, sendo extremamente utilizado em problemas de electrónica de Rádio-Frequência.

## MODELAÇÃO MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA CARDIOVASCULAR

**Alexandra Moura**

CEMAT, Instituto Superior Técnico

As doenças cardiovasculares representam uma das maiores causas de morte nos países desenvolvidos, incluindo Portugal, tendo por isso um grande impacto económico e social. A simulação do sistema cardiovascular, através da modelação matemática e análise numérica, é portanto de extrema importância. Ela permite entender e interpretar funcionalidades da circulação sanguínea de forma não invasiva, seja em situações fisiológicas ou patológicas, dando desse modo um instrumento de trabalho à comunidade médica.

Apesar dos avanços na simulação do sistema circulatório, a sua modelação é ainda uma tarefa difícil. De facto, o sistema cardiovascular é complexo, sobretudo devido à heterogeneidade do ponto de vista geométrico e funcional. Neste trabalho será apresentada a complexidade do sistema circulatório e em que medida a modelação matemática e simulação numérica podem ser ferramentas importantes na sua compreensão. Serão apresentados os modelos matemáticos utilizados. Estes incluem modelos tridimensionais de fluidos e de interacção fluido-estrutura, bem como modelos unidimensionais. Serão apresentados exemplos da sua implementação em resultados numéricos, incluindo casos de geometrias reais, obtidas através de imagens médicas.

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA EM MODELOS POROELÁSTICOS

**Sílvia Barbeiro**

CMUC, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Os modelos que simulam as propriedades geomecânicas e o fluxo de fluidos em meios porosos assumem relevância em diversas áreas de engenharia, surgindo em múltiplos contextos como, por exemplo, a exploração de petróleo e de gás, o tratamento de água contaminada no subsolo, ou o estudo de deformações ósseas. Neste trabalho, consideram-se as soluções numéricas para o modelo de poroelasticidade de Biot obtidas a partir de um método que combina elementos finitos mistos, para equação do fluxo, e elementos finitos contínuos, para a equação de elasticidade. As soluções numéricas podem ser calculadas simultaneamente, resolvendo um sistema totalmente acoplado, ou iterativamente, num processo de aproximações sucessivas de cada uma das variáveis. As propriedades qualitativas das soluções obtidas, nomeadamente a estabilidade e convergência, são analisadas. Apresentam-se resultados numéricos para o conhecido problema de Mandel que tem sido usado como um problema de referência não só porque admite uma solução analítica, o que permite aferir a qualidade das aproximações numéricas, como pelo seu interesse para o estudo das interacções sólido/fluido.

A UTILIZAÇÃO DE SUPERFÍCIES TRIPLAS PERIÓDICAS  
PARA APLICAÇÕES MÉDICAS**Henrique A. Almeida e Paulo J. Bártolo**

henrique.almeida@ipleiria.pt, pbartolo@ipleiria.pt

Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentado de Produto, IPLeiria

A Engenharia de Tecidos é uma tecnologia nova e em rápido desenvolvimento que se destina a produzir substitutos viáveis para a restauração, manutenção ou melhoramento da função dos tecidos ou órgãos humanos. A estratégia mais importante e em crescente desenvolvimento em Engenharia de Tecidos envolve a deposição de células sobre matrizes de suporte (*scaffolds*) biocompatíveis e biodegradáveis. Estas estruturas são altamente porosas por questões de vascularização. Contudo, para uma boa proliferação, os *scaffolds* devem apresentar po-

ros de pequenas dimensões (em regra os poros devem ser de dimensão superior às células numa suspensão, isto é, maiores que  $10\text{ }\mu\text{m}$ ). Devem apresentar, igualmente, boas propriedades mecânicas transferindo gradualmente as forças para o tecido em formação. As características anteriormente apresentadas, por vezes, antagónicas, são fundamentais para o design optimizado de *scaffolds*. Neste artigo, para além de se apresentarem detalhadamente as características que um *scaffold* deve possuir para aplicações em Engenharia de Tecidos, é igualmente, apresentado uma ferramenta de projecto assistido por computador de *scaffolds* que visa a concepção de matrizes com valores optimizados do ponto de vista de porosidade, propriedades mecânicas e características de vascularização. Para tal, e no sentido de se obterem representações de *scaffolds* o mais biomiméticos possíveis, são utilizadas superfícies triplas periódicas (por exemplo superfícies de Schwartz) para a sua modelação.

## NUMERICAL SIMULATION OF THE INCOMPRESSIBLE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN A MOVING DOMAIN: APPLICATION TO HEMODYNAMICS

**Gonçalo Pena**

gpena@mat.uc.pt

CMUC, Universidade de Coimbra

The accurate simulation of blood flow in arteries is critical if we are to trust the simulation's predictions. In a fluid-structure interaction setting, as it is the case of blood flowing in arteries, it is all the more important to obtain reliable results to understand, for example, the impact of pathologies on blood flows in the cardiovascular system. In large arteries, blood behaves like a Newtonian fluid and can be modelled by the incompressible Navier-Stokes equations. In this talk we address the numerical simulation of the incompressible Navier-Stokes equations defined in a moving domain and its application to the simulation of blood flow in (large) arteries. The presentation is divided in two parts: in the first part, we introduce the Navier-Stokes equations and discuss how to solve them numerically using high order approximation methods in space and time; the second part of the talk is dedicated to the application of the numerical algorithm presented to a simple hemodynamics problem.



## CONSTRUÇÃO DE TRAJECTÓRIAS DE VARRIMENTO LINEAR PARA FABRICAÇÃO RÁPIDA

**Miguel Belbut Gaspar**

miguel.gaspar@ipleiria.pt

Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentado de Produto, IPLeiria

Em diversas aplicações industriais, e em particular no domínio da fabricação rápida, é recorrente o problema de efectuar o varrimento de uma região do plano, tipicamente por segmentos de recta paralelos. Dependendo da aplicação concreta, diferentes restrições deverão ser levadas em conta, assim como diferentes objectivos são passíveis de optimização.

O trabalho apresentado foi motivado em particular pela aplicação na fabricação rápida aditiva por extrusão. Esta técnica consiste na construção de uma peça tridimensional camada-a-camada, pela deposição intermitente de um filamento de material extrudido. Dado que a interrupção do fluxo de material afecta negativamente quer a geometria quer as propriedades mecânicas da peça, assim como o tempo de execução, pretende-se minimizar as descontinuidades da trajectória de varrimento.

Neste sentido, procurou-se estabelecer uma definição formal clara do problema, no contexto da topologia, e apresenta-se um algoritmo para construir tais trajectórias, e sua implementação em Matlab. O algoritmo desenvolvido poderá ser aplicado em outros domínios, como o CNC ou sistemas automatizados de pintura.

# THE IMPORTANCE OF NUMERICAL ANALYSIS ON THE OPTIMIZATION OF TRANSCRANIAL DIRECT CURRENT STIMULATION

**Paula Faria<sup>(a)</sup> e Alberto Leal<sup>(b)</sup>**

pfaria@estg.ipleiria.pt

<sup>(a)</sup>Mathematics Department, School of Technology and Management and Centre for Rapid and Sustainable Product Development, Polytechnic Institute of Leiria

<sup>(b)</sup>Neurophysiology Department, Centro Hospitalar Psiquiátrico de Lisboa

Transcranial Direct Current Stimulation (tDCS) is a non-invasive, painless and reversible technique that is able to modulate the cortical excitability and its optimization has much been assisted by numerical methods. However, despite the increasing interest in transcranial application of weak direct currents for clinical practice, the low focality and the unknown distribution of the electric field in the human head are critical drawbacks that remain to be overcome. In this study we use the finite element method and a spherical head model to optimize the clinical application of tDCS. We solve the Laplace Equation and quantify the electric field distribution in the brain for different electrode configurations. We show that the use of a mixed electrode system - a small electrode positioned over the region of interest and a bigger one, positioned on the scalp away from the first one; can increase the focality in the cortex and allow for effective stimulation in regions that are located up to about 3 cm below the inner surface of the skull. In addition, the electrode montage proposed by this study for the application of tDCS allows the application of tDCS concomitantly with the recording of the neuronal activity using EEG. Our approach was tested in two epileptic patients and the results suggest that a significant reduction of the epileptic activity can be achieved for patients with refractory epilepsy.

## 5.5 Sistemas Dinâmicos

Org. **João Lopes Dias** (ISEG-UTL)  
jldias@iseg.utl.pt

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 16h30-17h45 (Sessão temática IV)

16h30-16h50 Diogo Pinheiro: *The chaotic motion of a charged particle moving in an electric lattice under a uniform magnetic field*

16h55-17h15 Alexandre Rodrigues: *Dinâmica perto de redes heteroclínicas*

17h20-17h45 Rui Paiva: *Hopf bifurcation in one-dimensional symmetric coupled cell networks*

### 10 de Julho, Sábado, 14h30-15h45 (Sessão temática V)

14h30-14h50 Pedro Duarte: *Lyapunov Morse functions on flag manifolds*

14h55-15h15 Célia Ferreira: *Propriedades estáveis de campos vectoriais com divergência nula*

15h20-15h45 Gianluigi del Magno: *A random fixed point theorem for certain transfer operators*

THE CHAOTIC MOTION OF A CHARGED PARTICLE  
MOVING IN AN ELECTRIC LATTICE UNDER A UNIFORM  
MAGNETIC FIELD

**Diogo Pinheiro**  
CEMAPRE ISEG-UTL

We study the dynamical properties of the motion of a charged particle in a lattice of fixed charges and under the effect of a uniform magnetic field. This dynamical system is Hamiltonian with two degrees of freedom. The main result states that there exists a subset on the space of parameters and energy level sets for which there is an invariant subset where the Hamiltonian system under consideration contains a suspension of a subshift of finite type with positive entropy.

DINÂMICA PERTO DE REDES HETEROCLÍNICAS

**Alexandre Rodrigues**  
CMP FCUP

Em equações diferenciais com simetria, é frequente a ocorrência de redes heteroclínicas robustas associadas a focos instáveis ou a soluções periódicas. Neste seminário, vamos discutir propriedades geométricas e “robustas” que surgem na vizinhança destas redes heteroclínicas, designadamente, estabilidade assintótica, switching e cycling e analisar situações genéricas em que podem ocorrer. Vamos ainda ver em que condições a dinâmica perto da rede tem uma ferradura suspensa.

HOPF BIFURCATION IN ONE-DIMENSIONAL SYMMETRIC  
COUPLED CELL NETWORKS

**Rui Paiva**  
CMP FCUP, IPLeia

We consider symmetric coupled cell networks of differential equations. We show that already at the level of Abelian symmetry, very degenerate codimension-one bifurcations can occur. This degenerate

behaviour occurs due to the restrictions that the symmetry group of the network and the network structure impose at the associated coupled cell networks of differential equations. (Joint work with Ana Paula S. Dias.)

## LYAPUNOV MORSE FUNCTIONS ON FLAG MANIFOLDS

**Pedro Duarte**

CMAF FCUL

Flag manifolds are boundaries of the special linear group  $SL(n, \mathbb{R})$ , and in particular they are homogeneous spaces under the action of this group. Given such a boundary  $M$  and a positive definite symmetric matrix  $A \in SL(n, \mathbb{R})$ , we describe a class of associated functions which are simultaneously  $\mathbb{Z}_2$ -perfect Morse functions of  $M$  and Lyapunov functions for the diffeomorphism  $\varphi_A : M \rightarrow M$  induced by  $A$  on  $M$ . The topology of  $M$  as well as the dynamics of  $\varphi_A$  are completely determined by the critical point structure of these functions.

## PROPRIEDADES ESTÁVEIS DE CAMPOS VECTORIAIS COM DIVERGÊNCIA NULA

**Célia Ferreira**

CMP FCUP

Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana, conexa, fechada com dimensão  $n \geq 3$  e  $\mathfrak{X}_\mu^1(M)$  o conjunto dos campos vectoriais com divergência nula em  $M$ , munido da topologia  $C^1$ . Dizemos que  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  verifica a *propriedade estrela* se existir uma  $C^1$ -vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $X$  tal que todo  $Y \in \mathfrak{X}_\mu^1(M) \cap \mathcal{U}$  tem todas as singularidades e todas as órbitas periódicas hiperbólicas. Nesta palestra abordaremos as seguintes questões:

- Se  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  verifica a propriedade estrela, então  $X$  não possui singularidades e  $X$  é Anosov.
- Se  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  é estruturalmente estável, então  $X$  pode ser aproximado por um  $Y \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  Anosov.

- $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  pode ser aproximado por  $Y \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  Anosov ou por  $Z \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  com um ciclo heterodimensional.

## A RANDOM FIXED POINT THEOREM FOR CERTAIN TRANSFER OPERATORS

**Gianluigi del Magno**  
CEMAPRE ISEG-UTL

We present a random fixed point theorem for transfer operators related to expanding maps on manifolds. As an application of this result, we show that the filtering process associated to random maps that expand in average is exponentially asymptotically stable.

This is joint work with Jochen Broecker (MPIPKS, Dresden).

## 5.6 Ensino da Matemática

Org. **Paula Faria** (ESTG-IPLeiria)  
pfaria@estg.ipleiria.pt

**8 de Julho, 5<sup>a</sup> feira, 17h00-18h15** (Sessão temática I - Instrumentos de Avaliação)

17h00-17h15 José Azevedo, Cristina Torres, Ana Paula Lopes e Lurdes Babo: *Questões de Escolha Múltipla - Uma Opção em Matemática*

17h15-17h30 Miguel Abreu e Maria João Afonso: *Prova de Matemática da SPM: Propósitos e Metodologia de Construção de um Teste Estandarizado*

17h30-17h45 Helena Monteiro e Ana Moura Santos: *Testes Estandarizados de Matemática: O Que Se Faz Lá Fora*

17h45-18h00 Rui Paiva: *Testes e exercícios de treino de Matemática online*

**9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 10h20-11h35** (Sessão temática II - Dificuldades no Ensino da Matemática)

10h20-10h35 Nuno Crato e Joana Teles: *O papel dos exercícios e dos problemas no ensino e no desenvolvimento do raciocínio matemático*

10h35-10h50 Maria Helena Monteiro, Maria João Afonso e Marília Pires: *Respostas erradas aos itens do PMAT-00: hipóteses explicativas*

10h50-11h05 Carlos Santos: *Matemática Elementar em Singapura*

11h05-11h20 Maria Eugénia Ferrão e José G. Dias: *Latent class models with concomitant variables: an approach to the understanding of mathematics learning*

**9 de Julho, 6ª feira, 11h45-13h00** (Sessão temática III - Manuais e Instrumentos de Apoio ao Ensino)

11h45-12h00 Maria Helena Damião e Maria da Luz Sécio: *Análise de manuais escolares de matemática do 9.º ano de escolaridade*

12h00-12h15 Isabel Hormigo e Carlos Grosso: *Avaliação e certificação de manuais escolares*

12h15-12h30 Maria Isabel Festas e Maria Helena Damião: *Lugar da resolução de problemas nas orientações curriculares para a matemática e análise da sua validade*

12h30-12h45 Jaime Carvalho e Silva: *Dois estudos recentes do ICMI*

**9 de Julho, 6ª feira, 16h30-17h45** (Sessão temática IV - Ensino Superior)

16h30-16h45 André Herdade, Amélia Silva e Yasser Omar: *(In)Sucesso na Matemática face a outras disciplinas: um estudo comparado no ISEG-UTL (1993-2008)*

16h45-17h00 Sara Tribuzi M. N. Morais e M. Teresa T. Monteiro: *A aplicação dos Métodos Numéricos na Engenharia - uma experiência pedagógica*

17h00-17h15 Arménio António da Silva Correia: *Objectos de Ensino e Aprendizagem da Matemática Elementar à Matemática Aplicada*

17h15-17h30 Francisco Lage Calheiros: *Que Ensinar, Como Ensinar, Matemática a alunos de cursos de Engenharia*



**10 de Julho, Sábado, 14h30-15h45** (Sessão temática V - Do lado lúdico...)

14h15-14h30 Pedro J Freitas: *Matemática e composição musical*

14h30-14h45 Alexandra Nascimento Baptista, Cidália Macedo, Diogo Baptista, Liliana Ferreira e Rui Pinto: *CiênciaLIZar através da concepção e desenvolvimento de uma Ideia*

14h45-15h00 Alda Carvalho, Carlos Santos, João Pedro Neto e Jorge Nuno Silva: *Baralho aritmético*

15h00-15h15 M<sup>a</sup> de Fátima Pacheco, Florbela Fernandes, Ana I. Pereira e Paula Odete Fernandes: *Experiências com a exposição Eurekit*

15h15-15h30 Maria de Fátima Vale de Gato Santos Rodrigues: *Adoras Matemática? Ótimo! Detestas Matemática? Perfeito!*

**10 de Julho, Sábado, 14h30-15h45** (Sessão temática VII - Programas e Formação de Professores)

14h30-14h45 Sara Caldeira e Helena Mouriño: *A Estatística e as Probabilidades no Ensino Secundário: Análise dos programas de Matemática A e B*

14h45-15h00 Marina Rodrigues e Hugo Menino: *O sentido de número dos futuros professores do 1<sup>o</sup> Ciclo*

15h00-15h15 C. Miguel Ribeiro e Helena Gomes: *O que distingue o Saber Fazer do Saber Ensinar a Fazer: A especificidade do conhecimento matemático para o ensino*

15h15-15h30 Maria Helena Damião e Ana Cristina Magalhães: *Planos da Matemática: Interpretação e Concretização no 3.<sup>o</sup> Ciclo do Ensino Básico*

**10 de Julho, Sábado, 16h00-17h15** (Sessão temática VI - Ensino Básico)

16h00-16h15 Daniela Azevedo e Sandra Campelos: *Novos Programas, Outra Aprendizagem  
Novos Desafios, Outra Abordagem*

16h15-16h30 Dina Tavares, Nuno Rainho e Rita Cadima: *Matematrix*

16h30-16h45 Hélia Pinto: *A importância dos modelos no processo de matematização: o caso da multiplicação e divisão de números racionais*

16h45-17h00 José Manuel dos Santos dos Santos: *Actividades algébricas no 5º ano do Ensino Básico no contexto da implementação do programa do ensino básico à generalizar em 2010-2011*

**10 de Julho, Sábado, 16h00-17h15** (Sessão temática VIII - Tecnologias no Ensino)

16h00-16h15 Alda Carvalho e Carlos Santos: *Ensinar matemática em quadros interactivos*

16h15-16h30 Vera Dias e Paula Marta Bruno: *A aprendizagem na disciplina de Matemática com recurso a novas tecnologias*

16h30-16h45 Maria da Graça Marques e Marília Pires: *Desenhar com funções: um projecto pedagógico*

16h45-17h00 Joaquim Mateus: *O GeoGebra e as tarefas no novo programa*

## QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA UMA OPÇÃO EM MATEMÁTICA

**José Azevedo, Cristina Torres, Ana Paula Lopes e Lurdes Babo**

jazevedo@iscap.ipp.pt, ctorres@iscap.ipp.pt, aplopes@iscap.ipp.pt,  
lbabo@iscap.ipp.pt

Instituto Superior de Contabilidade e Administração do Porto - ISCAP,  
Instituto Politécnico do Porto - IPP

Pretende-se com este artigo analisar a construção de questões de escolha múltipla. Averiguar até que ponto este tipo de questões podem ser consideradas uma alternativa, na avaliação, a outros métodos, especialmente na área de Matemática, em oposição aos métodos tradicionais, tais como as questões de resposta aberta.

Nesse sentido, ilustramos algumas opiniões de investigadores. Muitas vezes, a percepção que se tem sobre a construção deste tipo de questões, e por sua vez a elaboração de testes/exames, é que são fáceis de criar. Mas não é verdade! Uma boa construção deste tipo de questões, testes e exames, é um trabalho duro e exige alguma habilidade para a sua elaboração por parte dos professores.

Analisam-se as dificuldades de construção das questões de escolha múltipla bem como algumas das suas vantagens e limitações. Referimos também as críticas frequentes e preocupações acerca das questões de escolha múltipla. Também são apresentadas algumas orientações com o objectivo de melhorar a qualidade das questões de escolha múltipla.

Como é sabido o uso das novas tecnologias é recomendado por várias organizações europeias (Parlamento Europeu, ODL Liaison Committee, entre outros). Como resposta a essas recomendações temos vindo a usar a plataforma Moodle, tecnologia que oferece aos professores ferramentas para criar oportunidades de aprendizagem diferenciadas para os alunos.

Finalmente, mostram-se alguns exemplos de questões de escolha múltipla na área de Matemática, e ilustram-se como podemos tirar proveito e melhorar este tipo de questões.

Palavras-chave: Matemática, Questões de Escolha Múltipla, Tecnologia em Educação, Métodos de Ensino.

## PROVA DE MATEMÁTICA DA SPM: PROPÓSITOS E METODOLOGIA DE CONSTRUÇÃO DE UM TESTE ESTANDARDIZADO

**Miguel Abreu<sup>(a)</sup> e Maria João Afonso<sup>(b)</sup>**

mabreu@math.ist.utl.pt, jafonso@fp.ul.pt, majafonso@netcabo.pt

<sup>(a)</sup>SPM/IST-UTL, <sup>(b)</sup>FP-UL

Este trabalho introduz um novo teste standardizado de conhecimentos de Matemática, actualmente em fase de desenvolvimento experimental, dirigido aos estudantes que frequentam o 1º ano do ensino superior português em cursos de ciência e tecnologia. Propõe-se esclarecer, por um lado, o “porquê” da criação deste instrumento - motivações e propósitos da iniciativa de construção do teste por parte da SPM - e, por outro lado, o “como” do desenvolvimento do instrumento - metodologia e técnicas de construção e estudo do teste.

Um ponto da situação será efectuado, dando conta das fases do projecto já completadas, e os principais resultados e conclusões constituirão enquadramento para a identificação dos passos seguintes do projecto, seus objectivos e principais opções metodológicas.

## TESTES ESTANDARDIZADOS DE MATEMÁTICA: O QUE SE FAZ LÁ FORA

**Helena Monteiro<sup>(a)</sup> e Ana Moura Santos<sup>(b)</sup>**

helenamonteiro@ipt.pt, amoura@math.ist.utl.pt

<sup>(a)</sup>Escola Superior de Tecnologia de Abrantes, IPT

<sup>(b)</sup>Instituto Superior Técnico, UTL

O nosso interesse em construir um Teste de Matemática Standardizado para aferir os conhecimentos dos estudantes portugueses à entrada de um curso superior de ciências e tecnologia, conduziu-nos a um levantamento sistemático de O Que Se Faz Lá Fora sobre métodos de aferição de conhecimentos de Matemática na transição do ensino secundário, ou equivalente, para o ensino superior. Dependendo do país, e também da instituição de ensino, o estudante pode ter de fazer mais de uma prova de Matemática, integrada ou não num conjunto de provas requeridas para o ingresso, realizadas num único ou em diferentes momentos. Nesta comunicação, pretendemos mostrar que, apesar de haver

alguma uniformidade nas áreas de conteúdo destes testes, existe uma grande diversidade no formato dos itens, no tempo de duração e na utilização de calculadora e de formulário. O mesmo acontece em relação à natureza da instituição responsável pela elaboração, organização e aplicação do teste.

## TESTES E EXERCÍCIOS DE TREINO DE MATEMÁTICA ONLINE

**Rui Paiva**

rui.paiva@estg.ipleiria.pt

Dep. Matemática, ESTG-IPLeiria e CMUP - Centro de Matemática da  
Universidade do Porto

O STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel) é um sistema gratuito de construção de testes de Matemática online desenvolvido na Universidade de Birmingham no Reino Unido. Os sistemas de avaliação online presentes nas plataformas de ensino/aprendizagem convencionais, por exemplo Blackboard e Moodle, são muito limitados no tipo de perguntas que podem incluir nos seus testes. Nestas plataformas não podem ser implementadas perguntas cuja resposta correcta possa ser dada de muitas formas diferentes ou em que existe uma grande variedade de respostas correctas.

No STACK, o aluno pode apresentar a sua resposta sob a forma de uma expressão matemática. O sistema utiliza o software livre Maxima (semelhante ao Matlab e ao Maple) para manipular expressões matemáticas na forma simbólica e comparar as respostas do aluno e do professor.

**Exemplo:** O aluno apresenta numa pergunta a resposta  $(2x+x^2+1)/(1+x)$ . O STACK transforma a expressão introduzida em código L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e pergunta ao aluno se deseja submeter  $\frac{2x+x^2+1}{1+x}$ . Se a resposta do professor for, por exemplo,  $(x^2+2x+1)/(x+1)$  a diferença entre as duas respostas é 0 e considera que o aluno respondeu bem. O professor, se o desejar, pode incluir a resolução da pergunta e/ou comentários à resposta do aluno.

À semelhança do Matlab, o Maxima manipula integrais, derivadas, sistemas de equações lineares, equações diferenciais, vectores, matrizes, gráficos, distribuições de probabilidades, etc. Todas as funcionalidades

do Maxima podem ser utilizadas no STACK.

As perguntas do STACK são processadas em código  $\text{\LaTeX}$  e podem depender de parâmetros e funções aleatórias definidas pelo professor. Deste modo, os testes possuem elevada qualidade tipográfica e são diferenciados para cada aluno. Na modalidade de teste de treino o aluno pode praticar inúmeras vezes perguntas semelhantes até obter aproveitamento no teste.

Podemos associar o STACK a plataformas de ensino/aprendizagem convencionais com o objectivo de fazer uso dos seus sistemas de autenticação, classificação de testes, registo de tentativas de resposta e restantes registos estatísticos. Vamos apresentar a sua associação ao Moodle.

O STACK foi utilizado no primeiro semestre do ano lectivo 2009-10 na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Os 300 alunos de quatro cursos realizaram exercícios de treino e trabalhos de casa diferenciados online. Após concluírem os trabalhos obtiveram de imediato a correcção das respostas e a sua classificação. Concluiu-se ser uma ferramenta com elevado potencial no ensino da Matemática e um importante complemento do ensino tradicional.

## Referências

- [1] Terry Anderson e Fathi Elloumi, editors. Theory and Practice of Online Learning. Athabasca University, 2004. (referenced 5 March 2008).
- [2] Grant Keady, Gary Fitzgerald, Greg Gamble, e Christopher Sangwin. Computer-aided assessment in mathematical sciences. In Proceedings of the UniServe Science Conference, 'Assessment in Science Teaching and Learning', pages 69-73. UniServe Science Uni of Sydney, September 28, 2006. ISBN 1864878657.
- [3] Christopher J. Sangwin. Assessing mathematics automatically using computer algebra and the Internet. Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 23(1):1-14, March 2004.
- [4] Christopher J. Sangwin. Assessing elementary algebra with STACK. International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, 38(8):987-1002, August 27, 2007.

- [5] Christopher J. Sangwin. New opportunities for encouraging higher level mathematical learning by creative use of emerging computer aided assessment. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 34(6):813-829, 2003.
- [6] I. Wild. *Moodle 1.9 Math*, Packt Publishing, 2009.

## O PAPEL DOS EXERCÍCIOS E DOS PROBLEMAS NO ENSINO E NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

**Nuno Crato**<sup>(a)</sup> e **Joana Teles**<sup>(b)</sup>

ncrato@iseg.utl.pt, jteles@mat.uc.pt

<sup>(a)</sup>ISEG-UTL e Sociedade Portuguesa de Matemática

<sup>(b)</sup>Universidade de Coimbra e Sociedade Portuguesa de Matemática

Exercícios, problemas e desafios são parte integrante e indispensável do ensino da matemática. Por vezes, insiste-se na necessidade de problemas não rotineiros, condenando a rotina como inimiga do raciocínio. Nesta apresentação distinguem-se os três tipos de problemas atrás referidos e argumenta-se que todos são necessários no ensino da matemática. Defende-se a necessidade de recuperar o papel dos exercícios, mesmo que rotineiros, e apontam-se os inconvenientes de basear o ensino apenas em problemas não rotineiros ou em problemas em contexto. Discute-se o papel dos desafios das Olimpíadas de Matemática.

## RESPOSTAS ERRADAS AOS ITENS DO PMAT-00: HIPÓTESES EXPLICATIVAS

**Maria Helena Monteiro<sup>(a)</sup>, Maria João Afonso<sup>(b)</sup> e Marília Pires<sup>(c)</sup>**

helenamonteiro@ipt.pt, jafonso@fp.ul.pt, mpirez@ualg.pt

<sup>(a)</sup>Escola Superior de Tecnologia de Abrantes, Instituto Politécnico de Tomar

<sup>(b)</sup>Faculdade de Psicologia, Universidade de Lisboa

<sup>(c)</sup>Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia,  
Universidade do Algarve

O PMAT-00 é uma versão experimental de um Teste de Matemática da SPM, que foi aplicado a alunos do 1.º ano de cursos de ciências e tecnologia no início do ano lectivo 2009/2010. Com este teste, para além de averiguar o grau de preparação dos estudantes para aprenderem as matérias de Matemática que lhes são propostas no 1.º ano do curso em que acabaram de ingressar, também se ambiciona compreender a natureza das suas principais dificuldades e identificar as falhas do ensino da Matemática que estão na base dessas dificuldades. Para atingir este objectivo, considerámos os itens discriminativos do PMAT-00 e analisámos aqueles em que uma das alternativas de resposta errada foi seleccionada por um número significativo de estudantes. Algumas explicações alternativas para os erros frequentes de resposta são enunciadas, prevendo-se a posterior aplicação de metodologia apropriada ao estudo mais detalhado das respostas, com vista à validação das hipóteses explicativas avançadas.

## MATEMÁTICA ELEMENTAR EM SINGAPURA

**Carlos Santos**

cps.carlos@gmail.com

Instituto Superior de Educação e Ciências

A matemática elementar não é uma simples colecção desconexa de factos sobre números e algoritmos de cálculo. Antes, é um campo intelectualmente exigente, desafiador e excitante.

Esta frase, retirada do livro recentemente publicado *Saber e Ensinar Matemática Elementar* escrito por Liping Ma, traduz uma das ideias mais importantes sobre este tema. Realmente, e de forma infeliz, até matemáticos experimentados por vezes tendem a pensar que a



matemática elementar é um mero conjunto de esquemas procedimentais que devem ser adquiridos de forma competente em criança e que é uma espécie de «pré-matemática avançada» que servirá o futuro de forma meramente instrumental. Este pensamento tem alguma verdade, mas não é de forma alguma tudo. Nesta apresentação pretende-se dar o exemplo relativo ao sistema utilizado em Singapura, caso paradigmático de um País recorrentemente colocado nos lugares cimeiras dos melhores estudos internacionais. A tomada de consciência da exigência associada a este tema bem como da subtil carga conceptual que lhe está associada são segredos do seu sucesso.

LATENT CLASS MODELS WITH CONCOMITANT VARIABLES:  
AN APPROACH TO THE UNDERSTANDING OF  
MATHEMATICS LEARNING

**Maria Eugénia Ferrão<sup>(a)</sup> e José G. Dias**

meferrao@ubi.pt

<sup>(a)</sup>Mathematics Department of University of Beira Interior

Concerns over mathematics learning have been increasing over the world giving special interest to the understanding of how learning happens. The research project called *School Effectiveness in Teaching-Learning of Mathematics* allowed a longitudinal study in the primary, elementary and lower secondary education which was conducted between 2004 and 2009. It stated as one of the specific objectives the development and promotion of quantitative methods in education, particularly in mathematics education. This paper presents a latent class model with concomitant variables applied to the data of a paired sample of 276 students enrolled in the 7<sup>th</sup> grade. The response variable represents whether learning has or has not occurred during the year and the concomitant variables are scores to assess the level of fluid intelligence components. Model parameter estimates suggest that there are two latent classes supported in verbal and spatial reasoning.

Keywords: latent class model, concomitant variables, clustering, mathematics learning, fluid intelligence, assessment.

## ANÁLISE DE MANUAIS ESCOLARES DE MATEMÁTICA DO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE

**Maria Helena Damião e Maria da Luz Sécio**

hdamiao@fpce.uc.pt

Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

Alguns estudos que incidem sobre as aprendizagens começam a ligar o insucesso académico a certas características que os manuais escolares apresentam, sobretudo se pensarmos que eles constituem um recurso educativo essencial, não só de estudo individual, como de apoio às aulas.

Neste particular, destacamos o *Programme for International Student Assessment* (PISA) que assinala este aspecto como um dos responsáveis pelos baixos resultados na área da Matemática.

Considerando a pertinência do tema, empreendeu-se um estudo que incidiu na análise da temática de *Geometria* em cinco dos seis manuais de Matemática disponíveis no mercado. A opção por esta temática deve-se ao facto de ser a mais representativa no 9.º ano de escolaridade.

Tal análise foi concretizada com base numa grelha estruturada, na qual constam devidamente especificadas e operacionalizadas as competências essenciais que os alunos devem adquirir/desenvolver ao longo do Ensino Básico.

Esclareça-se que a construção da grelha assentou no inventário e definição de competências constantes, simultaneamente, no *Currículo Nacional do Ensino Básico* (2001) e no *Programme for International Student Assessment*.

Os dados recolhidos evidenciaram um distanciamento entre as propostas de pedagógico-didáticas apresentadas nos manuais em causa e aquelas que entendem por adequadas para concretizar as referidas competências.

Daqui se retiram implicações, tanto para a construção de manuais, como para a sua exploração por parte dos professores em contexto da sala de aula.

Numa tentativa de compreender as consequências destes dados, procurou-se aprofundar a relação entre as aprendizagens matemáticas e da língua materna. Considerando que dificuldades em leitura parecem repercutir-se em dificuldades no desempenho de tarefas matemáticas, faz-se notar a responsabilidade acrescida na dupla tarefa acima enunciada.

## AVALIAÇÃO E CERTIFICAÇÃO DE MANUAIS ESCOLARES

**Isabel Hormigo e Carlos Grosso**

ishormigo@gmail.com, carlos.grosso@espn.edu.pt

CAME-SPM (Centro de Avaliação e Certificação de Manuais Escolares da  
Sociedade Portuguesa de Matemática)

Pretende-se divulgar os processos de avaliação e certificação de manuais escolares, cujo processo foi pela primeira vez aberto à candidatura de entidades independentes do Ministério da Educação.

Conforme a legislação em vigor, os manuais de Matemática para os 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade que entrarão em vigor no ano lectivo de 2010/2011, foram avaliados por entidades devidamente certificadas para esse efeito.

Para além dos manuais de Matemática daqueles anos, foram também sujeitos ao processo de avaliação e certificação os manuais de outras duas disciplinas, Inglês e Estudo do Meio, mas apenas para um ano de escolaridade em cada uma.

Dado que foi o primeiro ano em que se desenrolou este processo, daremos conta de algumas peripécias e das dificuldades que foram surgindo durante os dois meses e meio que a lei estabelece para que se concluam todos os procedimentos de avaliação e certificação de manuais escolares.

## LUGAR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA A MATEMÁTICA E ANÁLISE DA SUA VALIDADE

**Maria Isabel Festas e Maria Helena Damião**

Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

Em diversos países, os resultados das aprendizagens académicas apurados em estudos internacionais como o Timms ou o Pisa, têm desencadeado um aceso debate em torno da adequação das orientações pedagógicas para conduzir o ensino, patentes nos currículos, nos programas e nos manuais escolares. Esse debate, além de disperso, tem acontecido de modo sectorial e sido fortemente influenciado por posições ideológicas, aspectos que, conjugados, têm impedido a reflexão ob-

jectiva e fundamentada em dados científicos sobre essas mesmas orientações.

Ainda que não se conheça, de modo exacto, a influência que as referidas orientações têm no ensino e, em sequência, na aprendizagem, partimos do princípio que elas não são alheias ao trabalho de planificação e de instrução que os professores realizam, nem, às aquisições escolares dos alunos.

Considerando que a resolução de problemas é uma estratégia vivamente recomendada por correntes pedagógicas de teor construtivistas que têm largo acolhimento no terreno da educação formal, procurou-se verificar a sua presença nos documentos curriculares para o Ensino Básico relativos à matemática - *Currículo do Ensino Básico* (2001), antigos *Programas de Matemática* (1991, 2000, 2004) e novo *Programa de Matemática* (2007). Presença que se revelou ser de primeira linha em todos eles e para todos os ciclos e temáticas.

De seguida, partindo daquilo que se sabe acerca do nosso funcionamento cognitivo e, mais especificamente, daqueles aspectos da psicologia cognitiva que são relevantes para o ensino/aprendizagem da matemática, faz-se uma análise da adequação dessa estratégia.

Começa-se por apresentar o contributo que a psicologia cognitiva pode dar para um entendimento do ensino/aprendizagem nessa área disciplinar, nomeadamente, através da elucidação do papel importante da compreensão, dos *esquemas*, das estratégias e dos processos necessários à resolução dos problemas matemáticos. Segue-se uma análise da forma como se adquirem, recuperam e utilizam os diferentes tipos de conhecimento - declarativo e procedimental.

As limitações da memória de trabalho, que impõem a necessidade de se tratarem pequenas unidades de informação, bem como do treino na recuperação de conhecimentos declarativos e procedimentais, conduzem a uma estratégia pedagógica que realça a análise cognitiva das tarefas, e que é contrária àquela que é advogada pelas teses construtivistas.

A defesa de um ensino estruturado a partir de problemas que os alunos devem resolver, através da descoberta, parece contrariar aquilo que actualmente sabemos acerca da arquitectura e funcionamento cognitivos.

## DOIS ESTUDOS RECENTES DO ICMI

**Jaime Carvalho e Silva**

jaimecs@mat.uc.pt

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Secretário Geral do ICMI

Proponho-me apresentar o programa de Estudos desenvolvido pelo ICMI há cerca de 20 anos de que já resultaram 17 livros publicados inicialmente pela Cambridge University Press e actualmente pela editora Springer. Focarei a minha intervenção nos dois últimos publicados “Challenging Mathematics in and beyond the classroom” e “Mathematics Education and Technology - Rethinking the terrain”. Como foram produzidos (com a participação de toda a comunidade internacional), que contêm estes dois livros (na sua redacção intervêm sempre numerosas pessoas), que ajuda podem fornecer a matemáticos, professores de matemática e educadores, para que se possa caminhar para um melhor ensino da Matemática em todos os níveis de ensino e em todos os cantos do mundo.

(IN)SUCESSO NA MATEMÁTICA FACE A OUTRAS  
DISCIPLINAS: UM ESTUDO COMPARADO NO ISEG-UTL  
(1993-2008)

**André Herdade, Amélia Silva e Yasser Omar**

andreherdade@gmail.com, ameliasilva2@hotmail.com,

yasser.omar@iseg.utl.pt

CEMAPRE, Departamento de Matemática, ISEG - Universidade Técnica de  
Lisboa

Iremos apresentar um estudo comparativo sobre o sucesso escolar nos blocos das disciplinas de Contabilidade, de Economia e de Matemática (que inclui as disciplinas de Estatística) no Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG), na Universidade Técnica de Lisboa (UTL), entre 1993 e 2008. O tratamento dos dados foi feito usando estatística descritiva, e tendo em conta dois períodos, 1993-2006 (pré-Bolonha) e 2006-2008 (Bolonha), assim como a introdução de um regime de precedências e de semestres alternativos em 2002.

Depois de comparados os resultados dos diferentes blocos de disciplinas, entre si e com os resultados da licenciatura, concluiu-se que o

bloco de Matemática, entre os três em estudo, é o que apresenta maior insucesso, apesar das semelhanças entre os vários blocos, e que este insucesso se correlaciona com os resultados das licenciaturas, levando a que os alunos demorem, em média, um ano a mais para concluírem os seus estudos. Verificámos também que o aumento do número de anos para completar as disciplinas ou os cursos em estudo se relaciona com a diminuição das notas, e ainda, que as cadeiras iniciais de cada bloco de disciplinas estudado apresentam maior sucesso nos semestres alternativos aos programados. Finalmente, discutiremos a diminuição do espectro de distribuição das médias dos alunos no final da licenciatura, em relação às médias de entrada.

## A APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS NA ENGENHARIA - UMA EXPERIÊNCIA PEDAGÓGICA

**Sara Tribuzi M. N. Morais e M. Teresa T. Monteiro**

a49993@alunos.uminho.pt, tm@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas, Universidade do Minho

Os Métodos Numéricos têm um papel estrutural, de carácter transversal na formação em cursos de Engenharia. São ainda muito utilizados em problemas nas áreas de Economia, Medicina, Física, Química, entre outras. Os Métodos Numéricos procuram desenvolver processos de cálculo (algoritmos), utilizando uma sequência finita de operações aritméticas básicas, de forma a que certos problemas matemáticos se tornem exequíveis. Estes algoritmos envolvem, em geral, um grande número de cálculos aritméticos. Não é pois de estranhar que, nas últimas décadas, com o rápido crescimento das potencialidades dos computadores digitais, o papel dos Métodos Numéricos na resolução de problemas de engenharia tenha sofrido grande incremento.

As mais de duas décadas a leccionar a disciplina de Métodos Numéricos a cursos de Engenharia, levaram à constatação da dificuldade dos alunos, na identificação e aplicação dos vários tópicos de Métodos Numéricos nas unidades curriculares dos respectivos cursos e ainda noutras situações. Este trabalho surge então, da solicitação ao longo dos anos, pelos alunos, de um documento deste teor, com resolução simples e directa de exercícios de Métodos Numéricos aplicados à Engenharia e outras Ciências. É uma publicação de carácter pedagógico que com-

pila uma colecção de exercícios resolvidos de Métodos Numéricos todos com aplicação prática e de grau de complexidade compatível com a sua resolução em ambiente de aula ou exame. A resolução é feita manualmente e com recurso a software numérico específico. As matérias abordadas são: erro numérico, solução de uma equação não-linear, sistemas de equações lineares, sistemas de equações não-lineares, interpolação numérica, mínimos quadrados, diferenciação numérica e integração numérica. A pesquisa de exercícios com aplicação prática, recorrendo a várias fontes de informação, levou a uma selecção na área da Engenharia Ambiental, Biológica/Biomédica, Química, Civil, Comunicações/ Informática, Electrónica/Electrotécnica, Mecânica, Gestão Industrial, Física e outras.

Este projecto foi desenvolvido no âmbito duma Bolsa de Integração na Investigação (BII) da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT).

## OBJECTOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ELEMENTAR À MATEMÁTICA APLICADA

**Arménio António da Silva Correia**

armenioc@isec.pt

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Nas fichas das unidades curriculares de Matemática Elementar, Análise Matemática II e Matemática Aplicada apresenta-se como objectivo transversal a importância do aluno em se aperceber do papel estruturante da Matemática, enquanto ciência de base e ferramenta de suporte a um raciocínio lógico e estruturado, indispensável nas áreas da engenharia. Mostrar que é impossível resolver e programar correctamente um problema mal formulado, que possua ambiguidade nos seus termos, ou para o qual não seja possível recolher os dados necessários e/ou interpretar os resultados obtidos, é um dos pilares de uma formação científica que ser quer sólida e que faça uso de ferramentas e metodologias de trabalho complementares, como sejam, a utilização de um laboratório virtual de matemática<sup>1</sup> e software de matemática para tratamento e simulação computacional das matérias tratadas analiticamente.

A Matemática Elementar<sup>2</sup> é uma unidade extra-curricular, criada na sequência do concurso especial do Acesso a Maiores de 23 Anos, que

tem como objectivo principal dar formação de base em matemática, relativamente a matérias do ensino secundário, e, em particular sobre o Cálculo Diferencial em IR como rampa para uma iniciação ao Cálculo Integral em IR. Recorrendo ao Geogebra são criados objectos de aprendizagem que tornam simples a compreensão de assuntos de base e outros, por exemplo, a simulação da lei dos senos.

Na Análise Matemática II<sup>3</sup> da Licenciatura em Eng. Informática e curso Europeu de Informática o programa está estruturado em duas partes: 1ª parte - Cálculo Diferencial em  $\mathbb{R}^n$  e Integrais Múltiplos; 2ª parte - Tópicos de Métodos Numéricos. A existência de aulas práticas-laboratoriais torna possível dar formação de programação em Matlab e Maple. Ao longo do semestre são propostas actividades para criação de objectos de ensino e aprendizagem que facilitam a compreensão, visualização 3D e assimilação de matérias do programa da unidade curricular.

Em Matemática Aplicada<sup>4</sup> da Licenciatura em Eng. Biomédica - Ramo de Bioelectrónica as equações diferenciais são o objecto principal de estudo. Também nesta unidade curricular, para além das aulas teóricas existem aulas práticas-laboratoriais, onde a formação ministrada permite aos alunos adquirirem conhecimentos de programação de GUIs em Matlab para criarem, por exemplo, objectos de ensino e aprendizagem sobre transformadas de Laplace e aplicações que permitem avaliar a quantidade dum medicamento no sangue de um paciente.

O método pedagógico e científico utilizado assenta na exposição das matérias, demonstração e dedução de resultados importantes, resolução de exercícios e respectivo tratamento computacional através de programas CAS (Derive, Geogebra, Maple) e do Matlab, assim como, do acompanhamento dos alunos à distância em regime de b-learning. A consolidação das matérias passa pela realização de actividades de aprendizagem e avaliação ao longo do semestre, teste intercalar e provas de avaliação nas épocas de exame.

---

<sup>1</sup><http://lvm.isec.pt/>

<sup>2</sup><http://lvm.isec.pt/~armenioc/matelementar.htm>

<sup>3</sup><http://lvm.isec.pt/~armenioc/am2.htm>

<sup>4</sup>[http://lvm.isec.pt/~armenioc/matapl\\_BIOMEDICA.htm](http://lvm.isec.pt/~armenioc/matapl_BIOMEDICA.htm)



## QUE ENSINAR, COMO ENSINAR, MATEMÁTICA A ALUNOS DE CURSOS DE ENGENHARIA

**Francisco Lage Calheiros**

xico@fe.up.pt

DEC-FEUPorto e ENEAS - European Network for Environmental Assessment and  
Service

Não vou falar do edu QUÊ? nem do MatematiQUÊ? Uma parte severa das responsabilidades da “catástrofe” dos nossos alunos em Matemática vem dos matemáticos com mais ou menos vinte anos do que eu e das “escolas” de formação professores de aviário. Também não vou falar das teorias mais ou menos científicas do ensino, nem das diversas imposturas (não é Jean Bricmont e Alan Sokal?)

Não vou falar no secundário e de tudo o que antecede. Os alunos que temos são estes. NÃO TEMOS OUTROS. E vão desistir, alguns, mas a maioria *vai formar-se* mais ano menos ano.

Vou verberar os desajustamentos entre os planos de estudo e a capacidade dos alunos. Mas sobretudo verberar as correcções de provas com grelhas rígidas, e pontos corrigidos a granel que aumentam seriamente o insucesso sem garantir que o sucesso (aprovação) seja de qualidade.

Respeitáveis iniciativas como as da minha escola (FEUP), MAFI-QUI, Consultório de matemática) tiveram um sucesso muito relativo: mais do mesmo dá mais do mesmo.

### 1-OS MEUS ALUNOS:

- Cerca de 50% têm domicílio permanente fora do Porto;
- custa caro estudar na universidade;
- origem social cada vez mais modesta e iletrada;
- Quase nunca sabem por onde começar. SEM ESTÍMULO NÃO COMEÇAM.

A VIDA DE MUITOS ALUNOS É DURA, MUITO DURA, mesmo nas condições básicas de sobrevivência.

### 2-O QUE NÃO SE PODE FAZER:

Por muito que nos custe, não pudemos tirar-lhes as máquinas de calcular; não pudemos tirar-lhes os formulários de derivadas. É como para a maioria dos adultos tirar-lhes o automóvel.

### 3-O QUE FAZER EM ANÁLISE 1 (1º ano, 1º semestre)

Complexos. Polinómios, fracções e as funções associadas. Gráficos, MUITOS gráficos.

Topologia pouco, muito pouco e só quando motivada pelas necessidades.

Séries e séries funcionais. Manipulação de séries funcionais simples:  $\exp(x)$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\exp(ix)$ . Critérios de convergência para QUE? Comportamento assintótico na convergência e na divergência de séries.

Integração (nunca vi cadeira nenhuma nem livro nenhum com o título cálculo ou análise PRIMITIVAL): *um integral é um número*. Bem perceber a interpretação geométrica e ser capaz de avaliar o resultado rapidamente com áreas de figuras simples. Não insistir na decomposição em fracções simples nem no cálculo de “comboios” de expressões ao resolver integrais de funções racionais de funções trigonométricas.

#### 4-COMO FAZER?

*Não sei*. E este é o ponto central da minha comunicação.

Mas sei que os estudantes precisam de estímulos para não se preparem para as provas nos últimos dias, depois da prova da cadeira anterior. Convidá-los a virem trabalhar connosco umas horas todas as semanas e fotocopiar o que o professor fez com eles tem um efeito multiplicativo enorme. Diria maior do que o moodle.

#### 5-CONCLUSÃO

Não acredito demasiado no que disse. Posso sempre rever a minha posição, mas não vou copiar a atitude dos meus professores.

## MATEMÁTICA E COMPOSIÇÃO MUSICAL

**Pedro J. Freitas**

pedro@ptmat.fc.ul.pt

FCUL

Analisaremos como alguns compositores contemporâneos utilizaram conceitos matemáticos nas suas composições, de forma claramente voluntária.

## CIÊNCIALIZAR ATRAVÉS DA CONCEPÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA IDEIA

**Alexandra Nascimento Baptista<sup>(a,b)</sup>, Cidália Macedo<sup>(a)</sup>, Diogo Baptista<sup>(a,b)</sup>, Liliana Ferreira<sup>(a,c)</sup>, Rui Pinto<sup>(a)</sup>**

alexandra.nascimento@ipleiria.pt, baptista@estg.ipleiria.pt,  
cmacedo@ipleiria.pt, liliana.ferreira@ipleiria.pt, rui.pinto@ipleiria.pt

<sup>(a)</sup>Escola Superior de Tecnologia e Gestão - Instituto Politécnico de Leiria

<sup>(b)</sup>CIMA - Centro de Investigação em Matemática e Aplicações - UE

<sup>(c)</sup>CIO - Centro de Investigação Operacional - FCUL

Nesta apresentação será feita uma descrição do CiênciaLIZar, como centro de recursos e ensino experimental das ciências e como pólo de actividades disponíveis para alunos e professores, podendo estes requisitar exposições ou módulos, sem qualquer custo, através do site [www.ciencializar.ipleiria.pt](http://www.ciencializar.ipleiria.pt). Será brevemente descrita a criação do CiênciaLIZar como um projecto da Ciência Viva e relatado o seu percurso até a actualidade. Incidindo nas áreas da Matemática e da Física, serão apresentadas actividades destinadas aos diferentes ciclos, numa perspectiva de partilha desta experiência. Um dos principais objectivos do CiênciaLIZar é contribuir para a materialização dos conceitos, de forma a aprofundar e facilitar o seu entendimento. Deste modo, ilustrar-se-á como a disponibilidade para observar o que nos rodeia permite muitas vezes que surjam diversas ideias que se desenvolvem, se transformam através de várias etapas, permitem a construção de recursos e originam diferentes actividades, que se pretende que sejam apelativas para todos aqueles a quem ambicionamos chegar.

## BARALHO ARITMÉTICO

**Alda Carvalho<sup>(a)</sup>, Carlos Santos<sup>(b)</sup>, João Pedro Neto<sup>(c)</sup> e Jorge Nuno Silva<sup>(c)</sup>**

acarvalho@dem.isel.ipl.pt

<sup>(a)</sup>ISEL e CEMAPRE

<sup>(b)</sup>Instituto Superior de Educação e Ciências

<sup>(c)</sup>FCUL

Os jogos matemáticos, tal como os jogos em geral, são baseados num conjunto de regras e material apropriado. Por vezes, o mesmo material serve para um grande número de jogos diferentes. Casos populares

destes sistemas de jogos são os baralhos de cartas, os dominós, os dados, etc, que são usados para jogar centenas de jogos..

Seguindo esta linha, nesta sessão apresentaremos um baralho aritmético criado pela Associação Ludus, que incide fundamentalmente sobre jogos numéricos. O baralho tanto pode ser usado para jogar um número apreciável de jogos numéricos clássicos bem conhecidos, como para tentar novos jogos numéricos recentemente inventados.

## EXPERIÊNCIAS COM A EXPOSIÇÃO EUREKIT

**M<sup>a</sup> de Fátima Pacheco, Florbela Fernandes, Ana I. Pereira e  
Paula Odete Fernandes**

pacheco@ipb.pt, fflor@ipb.pt, apereira@ipb.pt, pof@ipb.pt

Instituto Politécnico de Bragança

A exposição **\*EUREKit\*** - exposição itinerante de jogos matemáticos, do Instituto Politécnico de Bragança, é constituída por seis módulos de jogos de estratégia e de tabuleiro. A partir da exploração dos jogos e da sua relação com a Matemática, este projecto pretende, de uma forma didáctica e atractiva, contribuir para aumentar o interesse dos alunos pela disciplina de Matemática. Neste trabalho, apresenta-se a experiência efectuada na Escola Básica 2, 3 de Vila Flor, onde a exposição permaneceu durante uma semana e onde a população estudantil manteve contacto com os jogos da Exposição.

ADORAS MATEMÁTICA? ÓPTIMO!  
DETESTAS MATEMÁTICA? PERFEITO!

**Maria de Fátima Vale de Gato Santos Rodrigues**

Departamento de Matemática Pura, Universidade do Porto

[http://clubemath.dmat.fct.unl.pt/proximo-encontro/index\\_html](http://clubemath.dmat.fct.unl.pt/proximo-encontro/index_html)

Estas interrogações/afirmações percorreram a zona da Grande Lisboa, suscitando a curiosidade de miúdos e graúdos. Tratava-se de uma divulgação do ClubeMath, o Clube de Matemática da Faculdade de

Ciências e Tecnologia da UNL, destinado a crianças e jovens desde o 2º ciclo até ao fim do ensino secundário. Este Clube surgiu em Junho de 2007, tendo por objectivo principal contrariar o fenómeno social do “não gosto de Matemática!”. É urgente combater este fenómeno, bem patente em Portugal e muito mais abrangente do que o universo restrito das escolas, porque não pode haver “sucesso em matemática” sem o “gostar de matemática”. Ambos estão directa e indissociavelmente ligados.

No ClubeMath desenvolvemos actividades matemáticas lúdicas visando desmistificar a ideia pré-concebida, e enraizada em muitas mentes, de que a matemática tem uma natureza intrinsecamente complexa e inacessível. No entanto, não defendemos que a Matemática deverá ser ensinada de forma divertida. Muito pelo contrário, defendemos o rigor e o formalismo no ensino da Matemática, com as devidas adaptações aos diferentes níveis de ensino. No entanto, achamos que é possível complementar essas abordagens com recurso a actividades paralelas mais lúdicas e apelativas.

Nesta palestra descrever-se-á a experiência dos 3 anos de actividade do ClubeMath.

## A ESTATÍSTICA E AS PROBABILIDADES NO ENSINO SECUNDÁRIO: ANÁLISE DOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA A E B

**Sara Caldeira e Helena Mouriño**

caldeira\_sara@hotmail.com

Departamento de Estatística e Investigação Operacional,

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

As características do mundo actual tornaram a Estatística e as Probabilidades elementos fundamentais na formação dos cidadãos. Desta forma, estes temas têm vindo a assumir um papel importante nos Programas de Matemática do Ensino Secundário. O presente estudo visa a análise das temáticas de Estatística e de Probabilidades nos Programas de Matemática A e B do Ensino Secundário, bem como das respectivas brochuras de apoio ao professor. Os resultados obtidos evidenciam a necessidade de efectuar uma revisão quer nas temáticas de Estatística e de Probabilidades nos Programas de Matemática A e B do Ensino Secundário, quer nas respectivas brochuras de apoio.

## O SENTIDO DE NÚMERO DOS FUTUROS PROFESSORES DO 1º CICLO

**Marina Rodrigues e Hugo Menino**

marinar@esecs.ipleiria.pt, hmenino@esecs.ipleiria.pt

NIDE - Núcleo de Investigação e Desenvolvimento em Educação, IPLeiria

O propósito da comunicação é apresentar um diagnóstico do sentido do número dos futuros professores do 1º ciclo. Os informantes são 15 estudantes a frequentar o primeiro semestre do 4º ano de Licenciatura de formação de professores. O instrumento usado na recolha de dados foi um teste diagnóstico de sentido de número (TDSN) elaborado pela equipa de investigadores do projecto SNUMERO do Núcleo de Investigação em Educação (NIDE) do Instituto de Investigação, Desenvolvimento e Estudos Avançados (INDEA) do Instituto Politécnico de Leiria. A metodologia utilizada foi do tipo qualitativo e interpretativo, baseada na análise das respostas aos itens do teste. Os resultados evidenciam que de uma forma geral os futuros professores tendem a usar estratégias flexíveis de cálculo, com evidência de sentido do número, no contexto dos números inteiros. Já no contexto dos números racionais (não inteiros) os alunos evidenciam mais dificuldades, desde logo porque tendem a generalizar as propriedades dos inteiros ao universo dos racionais. Adicionalmente evidenciam dificuldades em ver os números racionais em contexto e em entender o universo dos racionais como um conjunto denso.

## O QUE DISTINGUE O SABER FAZER DO SABER ENSINAR A FAZER: A ESPECIFICIDADE DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO

**C. Miguel Ribeiro<sup>(a)</sup> e Helena Gomes<sup>(b)</sup>**

cmribeiro@ualg.pt, hgomes@esev.ipv.pt

<sup>(a)</sup>Universidade do Algarve, CIEO

<sup>(b)</sup>ESE Viseu

É consensual que a Geometria é um dos temas em que os alunos apresentam grandes dificuldades. Porém, não é tão consensual o porquê da ocorrência destas dificuldades ou o tipo de conhecimento que nos cumpre a nós próprios possuir, enquanto professores, de modo a colmatar e erradicar essas dificuldades dos alunos.

Assim, para além de um conhecimento de cada conteúdo que nos permita saber fazer (para nós próprios), cumpre-nos possuir também um conhecimento desse conteúdo que nos capacite a saber ensinar a fazer (torná-lo perceptível aos nossos alunos) e ainda uma visão periférica de como esse conteúdo evolui ao longo da escolaridade. Todas estas diferentes formas de conhecimento do conteúdo devem ser ainda complementadas com um conhecimento de um conjunto de estratégias “adequadas”, um pleno conhecimento do currículo e um saber que nos permita antecipar e colmatar as dúvidas e dificuldades dos alunos.

Nesta comunicação, a partir da pretensão de abordar algo “hipoteticamente simples”, como seja o estudo dos rectângulos, discutiremos alguns aspectos da especificidade do conhecimento matemático que, enquanto professores, devemos possuir de modo a preparar e explorar tarefas que permitam aprendizagens matemáticas significativas. A discussão desta especificidade do conhecimento matemático para o ensino de “rectângulos” tem por intuito maior permitir uma reflexão sobre a especificidade desse conhecimento relativamente a outros temas que são também problemáticos em termos das aprendizagens/resultados dos alunos.

## PLANOS DA MATEMÁTICA: INTERPRETAÇÃO E CONCRETIZAÇÃO NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

**Maria Helena Damião e Ana Cristina Magalhães**

hdamiao@fpce.uc.pt

Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

O défice evidenciado por avaliações internacionais e nacionais na aprendizagem da Matemática não tem deixado indiferentes os professores, os investigadores, os decisores da educação e a comunidade, em geral. No nosso país, uma das iniciativas, tomadas ao nível da tutela, para fazer face ao problema consistiu na implementação do *Plano de Acção da Matemática*.

Estando a ser implementado há três anos, interessa perceber como foi acolhido e desenvolvido pelos professores de Matemática. Assim, foi delineado um estudo empírico que se apresenta e que incide, numa das suas medidas: o *Plano da Matemática*.

Depois de estabelecido um quadro conceptual de teor pedagógico, examinaram-se os Planos vigentes nas escolas envolvidas, com o intuito de identificar as dificuldades com que se confrontavam ao nível do 3.º Ciclo do Ensino Básico, os objectivos e as estratégias que pensaram para as superar.

Num segundo passo, e com base no mesmo quadro conceptual, incidiu-se na interpretação que professores faziam desse Plano e no modo como o concretizavam, em dois momentos sequenciais: na planificação da acção em sala de aula e no decurso dessa acção. Para tanto, solicitou-se-lhes uma entrevista e a resposta a uma escala tipo *Likert*, bem como observação de aulas que leccionaram.

Verificou-se que, embora parte dos professores não tivessem estado na génese do Plano, investiram, tanto no seu conhecimento como na sua implementação. Verificou-se também a existência de uma relação estreita entre as intenções plasmadas no Plano e as práticas docentes, quer isto dizer que, pareceram conscientes do que se lhes era solicitado e actuaram em conformidade. Verificou-se, ainda, que a sua acção em sala de aula era tendencialmente consonante com a sua planificação pré-activa, evocando, frequentes vezes, uma acção investigativa e recorrendo à tecnologia e a contextos reais. O cuidado com a explicação clara e coerente exigida aos alunos, assim como a proposta de problemas foram opções tomadas em muitas das aulas.

Constatou-se, ainda, um pouco à margem dos propósitos do estudo em causa, uma postura face à escola e ao conhecimento manifestada pela maioria dos alunos das turmas analisadas que se afigura muito distante da de alunos dos países que apresentam elevados parâmetros de eficácia, tais como o Japão, a China ou a Finlândia.

Conclui-se a apresentação com uma confrontação entre os dados obtidos com reflexões e recomendações que diversas equipas de trabalho têm feito para conduzir as aprendizagens Matemáticas.



NOVOS PROGRAMAS, OUTRA APRENDIZAGEM  
NOVOS DESAFIOS, OUTRA ABORDAGEM

**Daniela Azevedo e Sandra Campelos**

danielaantunesazevedo@gmail.com, scampelos@sapo.pt

Colégio Internato dos Carvalhos

*“A Matemática nova ensinada de modo antigo é Matemática velha.”*

*Bento de Jesus Caraça (1901-1948)*

Apesar de direccionados para públicos-alvo diferentes, quer o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, quer o Referencial de Competências-Chave de Matemática para a Vida, para os cursos de Educação e Formação de Adultos (EFA) têm como principal objectivo a formação matemática de indivíduos actuates numa sociedade em constante mutação que apela à literacia matemática, bem como à própria literacia estatística.

A comunicação, que dará um enfoque especial ao 3.º ciclo do Ensino Básico e ao nível B3 de Matemática para a Vida, iniciar-se-á com uma sucinta contextualização dos objectivos subjacentes aos mesmos e com uma breve reflexão sobre as principais alterações.

A partilha de experiências realizadas no terreno, pelas oradoras, será privilegiada, com exposição e análise de algumas tarefas implementadas, nos diferentes contextos em que leccionam.

Com esta comunicação pretende-se contribuir para a difusão de ideias que promovam boas práticas de ensino, tendo por base as novas directrizes e as novas exigências que delas emanam, tendo sempre presente o papel fundamental que a Matemática deve ocupar na formação de indivíduos críticos, matematicamente literados e estatisticamente preparados.

## MATEMATRIX

**Dina Tavares, Nuno Rainho e Rita Cadima**

nunorainho@esel.ipleiria.pt

ESECS, IPLeiria

Com esta comunicação pretendemos apresentar o Matematrix, um projecto que visa desafiar os alunos do 1.º Ciclo para a resolução semanal de problemas com recurso às tecnologias. Sob a forma de concurso on-line, os alunos organizados em equipas vão respondendo aos desafios e acumulando pontos semana a semana. Em [www.matematrix.esecs.pt](http://www.matematrix.esecs.pt) é possível conhecer as várias equipas em jogo e as suas pontuações semanais e acumuladas, aceder aos problemas já resolvidos e comparar e discutir os diversos modos de resolução do mesmo problema. Com este projecto, dinamizado pelo grupo de Matemática da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, pretende-se simultaneamente contribuir para o desenvolvimento da literacia digital dos alunos e motivar para a aprendizagem em Matemática.

**A IMPORTÂNCIA DOS MODELOS NO PROCESSO DE  
MATEMATIZAÇÃO: O CASO DA MULTIPLICAÇÃO E  
DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS****Hélia Pinto**

hpinto@esecs.ipleiria.pt

NIDE - Núcleo de Investigação e Desenvolvimento em Educação, IPLeiria

Na perspectiva da Educação Matemática Realista, o processo de matematização é visto como progressivo, tornando-se o conhecimento cada vez mais formal e abstracto. Particularmente importante é o processo de transformar um problema do quotidiano numa questão matemática problemática, através da produção de modelos (matematização horizontal), bem como o processo de reorganização e expansão do conhecimento e capacidades dentro do próprio sistema matemático (matematização vertical). Estas formas de matematização distinguem-se pelo facto de ocorrerem em diferentes níveis da compreensão. Para que os alunos possam progredir do conhecimento informal para o formal, ou seja, conectar a matematização horizontal à vertical, esta perspectiva recomenda que se explorem situações de ensino-aprendizagem

que os estimulem à actividade de modelação, recorrendo a desenhos, diagramas ou tabelas.

Num estudo, que teve como objectivo promover o desenvolvimento do sentido da multiplicação e divisão de números racionais não negativos, foi implementada uma unidade de ensino, numa turma de alunos do 6.º ano de escolaridade, que contemplou a exploração de tarefas que estimulam a actividade de modelação. O objectivo do estudo inclui assim a identificação das potencialidades e limitações da referida unidade de ensino no processo de matematização dos alunos, nomeadamente, recolhendo evidências do papel dos modelos no referido processo. A metodologia adoptada seguiu o paradigma interpretativo com design de estudo de caso múltiplo. Para a recolha de dados recorreu-se a técnicas como a observação com registos vídeo e áudio, análise documental e entrevistas em profundidade com registos áudio e documental. Resultados preliminares evidenciam que o recurso à modelação das situações promove a ultrapassagem de alguns mal-entendidos dos alunos e, consequentemente, a sua progressão na compreensão e formalização dos conceitos matemáticos. Na comunicação serão apresentados o objectivo, a fundamentação teórica e a metodologia adoptados no estudo e alguns resultados ilustrativos. Tendo por base o trabalho feito na unidade de ensino que suporta o estudo, serão dados exemplos de produções dos alunos que evidenciam o recurso aos modelos como suporte na progressão do seu conhecimento informal para um conhecimento formal, ou seja, no seu processo de matematização.

Palavras-chave: Aprendizagem, Números racionais, Multiplicação, Divisão, Matematização horizontal, Matematização vertical, Modelação.

## ACTIVIDADES ALGÉBRICAS NO 5º ANO DO ENSINO BÁSICO NO CONTEXTO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA DO ENSINO BÁSICO À GENERALIZAR EM 2010-2011

**José Manuel dos Santos dos Santos**

ES D. Afonso Sanches / ESE IP Porto

No Programa de Matemática do Ensino Básico, em generalização no ano lectivo de 2010-2011, o tema Álgebra é um dos que surge no segundo ciclo, como novidade. Contudo, no 1º ciclo, aparecem tópicos relaciona-

dos com aprendizagens algébricas, nomeadamente no tema “Números e operações” onde os estudantes investigam sequências numéricas, trabalham com as estruturas multiplicativas e com os números racionais, constituindo uma base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. Por outro lado no tema Geometria é proposto o estudo de tópicos como os padrões geométricos, no 1º ciclo, e as sequências e regularidades, no 2º ciclo, relacionando-se a percepção geométrica e o sentido de número e das operações com o desenvolvimento do raciocínio algébrico. Neste contexto, ao longo dos últimos cinco anos, junto dos alunos de professores que frequentaram o no Programa de Formação Contínua em Matemática na ESE/IP Porto, foram desenvolvidas várias tarefas junto dos estudantes do 1º e 2º ciclos que induzem uma relação entre conceitos numéricos e geométricos, bem como, o aparecimento de relações que evidenciam aprendizagens algébricas junto dos estudantes nos diferentes níveis de ensino. Nesta comunicação apresentar-se-á: a) exemplos de tarefas realizados por alunos do 1º ciclo que indiciam o desenvolvimento de relações que indiciam a passagem da aritmética para a álgebra ; b) o resultado da implementação, em duas turmas do 5º ano, de uma cadeia de tarefas para trabalhar o tópico sequências e regularidades do tema da álgebra; c) a análise dos factores que influenciam o desenvolvimento das tarefas, no 1º e 2º ciclo, nomeadamente, a abordagem didáctica e o conhecimento matemático do professor .

## ENSINAR MATEMÁTICA EM QUADROS INTERACTIVOS

**Alda Carvalho<sup>(a)</sup> e Carlos Santos<sup>(b)</sup>**

acarvalho@dem.isel.ipl.pt

<sup>(a)</sup>ISEL e CEMAPRE

<sup>(b)</sup>Instituto Superior de Educação e Ciências

Actualmente as nossas escolas encontram-se, de forma geral, equipadas com quadros interactivos. Apesar das vantagens evidentes transversais à matemática, o complementar do uso dos quadros com software de matemática, traz ao ensino desta disciplina novas abordagens.

A SPM tem uma acção de formação acreditada incidindo nesta temática. Após ter realizado dezenas de acções, e conhecendo a opinião muito positiva dos professores, ilustraremos nesta sessão alguns exemplos paradigmáticos do que pensamos ser uma boa utilização desta tecnologia ao serviço da matemática.

## A APRENDIZAGEM NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA COM RECURSO A NOVAS TECNOLOGIAS

**Vera Dias e Paula Marta Bruno**

pbruno@fmh.utl.pt

Faculdade de Motricidade Humana, Universidade Técnica de Lisboa

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) estão cada vez mais desenvolvidas e difundidas. O mundo está cercado pelas tecnologias e pelas mudanças que elas introduzem. O computador tornou-se uma necessidade e a escola deve ter consciência de que hoje é através dele que os alunos comunicam com o mundo. O uso do computador na educação traz novas motivações para os alunos e concede ao professor a possibilidade de desenvolver novas oportunidades didácticas.

Numa altura em que as TIC conhecem um tão grande desenvolvimento, a sua utilização continua, de um modo geral, ausente da aula de Matemática. No entanto, é pertinente colocar a questão: “Será que a utilização das TIC no ensino da Matemática irá permitir melhorar a performance dos alunos?”.

## DESENHAR COM FUNÇÕES: UM PROJECTO PEDAGÓGICO

**Maria da Graça Marques<sup>(a,b)</sup> e Marília Pires<sup>(a)</sup>**

gmarques@ualg.pt, mpieres@ualg.pt

<sup>(a)</sup>Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia,  
Universidade do Algarve

<sup>(b)</sup>Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias, Universidade de Lisboa

Nos programas de matemática do ensino secundário é dedicado muito tempo ao estudo de funções e dos seus gráficos. No entanto, frequentemente, este estudo ou é feito de uma forma excessivamente informal, usando calculadoras gráficas e intuição para tirar conclusões na base do “parece”, ou então de uma forma demasiado formal e desinteressante. Os programas incluem uma forte ênfase em aplicações da matemática e em modelação matemática como forma de motivar os alunos. O problema é que estes não têm conhecimentos suficientes de outras ciências para compreender verdadeiramente a maior parte das aplicações ou para fazer modelações. Assim, estes objectivos não são cumpridos e, na prática, os estudantes não aprendem a manipular funções e os seus gráficos. Os estudantes chegam à universidade

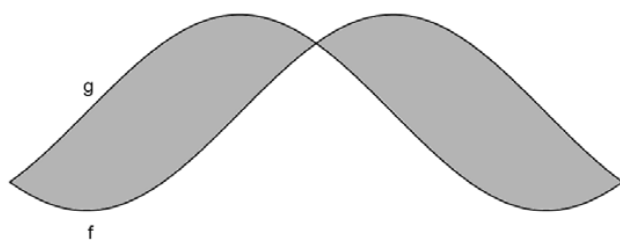
mostrando enormes dificuldades nas disciplinas de análise matemática devido à falta de conhecimentos de funções e, rapidamente, desencorajam e deixam para trás estas disciplinas, chegando por vezes a desistir e a optar por estudar algo diferente, que não envolva matemática.

O projecto que apresentamos foi concebido para alunos do ensino secundário e pretende, de uma forma lúdica e não convencional, ajudar a despertar nos estudantes o interesse pelo estudo das funções e motivar a definição de importantes conceitos relacionados com funções. Existem actualmente vários programas de computador que combinam geometria, álgebra e cálculo e permitem manipular simultaneamente as expressões analíticas e gráficas de funções. O objectivo desta apresentação é mostrar como, usando programas deste tipo (em particular será usado o GeoGebra), é possível produzir desenhos usando gráficos de funções e como isso pode ser útil para o seu ensino. A ideia é que os alunos apliquem os conhecimentos de funções a um objectivo que é viável: a criação de modelos matemáticos para desenhar objectos conhecidos.

Para ilustrar a ideia apresenta-se um exemplo simples de um bigode modelado por duas funções bem conhecidas.

#### Bigode

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$$



## O GEOGEBRA E AS TAREFAS NO NOVO PROGRAMA

**Joaquim Mateus**

jmateus@ipg.pt

Instituto Politécnico da Guarda

A utilização de Programas de Geometria Dinâmica é referenciada, por diversas vezes, no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Sendo o GeoGebra um software de utilização livre e disponível em Português, ele apresenta-se, na opinião de muitos, como uma boa opção.

Nesta comunicação tratar-se-ão os seguintes tópicos:

- Enquadramento no Novo Programa;
- Apresentação de conclusões sobre a utilização do GeoGebra em 2 turmas;
- Apresentação genérica do GeoGebra, nomeadamente os Itens de Menu e a Entrada Geométrica;
- Actividades práticas com recurso ao GeoGebra: Área de um rectângulo, Desigualdade triangular, Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo, ...

## 5.7 História da Matemática

Org. **Luís Saraiva** (FC-UL)  
mmff5@ptmat.fc.ul.pt  
(com a colaboração do Seminário  
Nacional de História da Matemática)

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 16h30-17h45 (Sessão temática IV)

16h30-16h50 Maria Fernanda Estrada: *Notas sobre o “pequeno tratado” das proporções no LIBER DE TRIPLICI MOTU de Álvaro Tomás (1509)*

16h55-17h15 Michela Oliveira e José Francisco Rodrigues: *A Secção Canónica Euclidiana*

17h20-17h45 Carlos Bastien: *Bento de Jesus Caraça e a Economia Matemática*

### 10 de Julho, Sábado, 14h30-15h45 (Sessão temática V)

14h30-14h50 Bernardo Mota: *A interpretação de Elementos III.2. por autores portugueses do século XVI*

14h55-15h15 Ana Paula Silva: *Descoberta das órbitas elípticas por Johannes Kepler - Exemplo peirceano do raciocínio abdutivo*

15h20-15h45 Hélder Pinto: *A Academia Real de Marinha e Comércio da Cidade do Porto: um caso peculiar entre as academias portuguesas do século XIX*



## NOTAS SOBRE O “PEQUENO TRATADO” DAS PROPORÇÕES NO LIBER DE TRIPLICI MOTU DE ÁLVARO TOMÁS (1509)

**Maria Fernanda Estrada**

Universidade do Minho

Em 1509, foi editada em Paris, em latim, uma obra dum autor português, Álvaro Tomás, cujo título abreviado é LIBER DE TRIPLICI MOTU. Desde os princípios do séc. XX, este livro tem sido objecto de estudo por parte de vários investigadores estrangeiros; mais recentemente, tem merecido também a atenção de investigadores portugueses. Nele, o autor propõe-se estudar três tipos de movimento, segundo a Tradição Calculatória, iniciada por Bradwardine, em Oxford; como introdução, apresenta o que o próprio autor chama “um pequeno tratado das proporções”. É apenas desta parte que nos ocuparemos, salientando alguns aspectos relevantes e curiosos, nomeadamente:

- a terminologia usada;
- uma demonstração original da irracionalidade da razão entre a diagonal dum quadrado e o lado;
- a comensurabilidade e composição de razões.

## A SECÇÃO CANÓNICA EUCLIDIANA

**Michela Oliveira<sup>(a)</sup> e José Francisco Rodrigues<sup>(b)</sup>**

oliveiramichela02@gmail.com, rodrigue@fc.ul.pt

<sup>(a)</sup>Escola Básica 2, 3 Dr. António Chora Barroso

<sup>(b)</sup>CMAF/UL

A “Sectio Canonis” é a versão latina de um texto de música grega atribuído, não sem controvérsia, a Euclides que permite uma interessante análise de algumas proposições euclidianas sobre teoria de números. Em vinte proposições e no estilo euclidiano dos “Elementos”, este pequeno tratado de tradição pitagórica e platónica baseia-se em vários teoremas sobre razões e “intervalos”, não necessariamente musicais, introduz conceitos de música antiga e mistura argumentação matemática com observações empíricas, procurando traduzir a experiência

musical na linguagem matemática e culminando, nas duas últimas proposições, na divisão do monocórdio (kanón) em razões que determinam um sistema no género diatónico. Do ponto de vista matemático e histórico é interessante a comparação das suas proposições de “teoria de intervalos”, com vista a uma aplicação à música, com algumas das proposições da teoria de números dos Livros VII e VIII dos “Elementos” de Euclides.

## BENTO DE JESUS CARAÇA E A ECONOMIA MATEMÁTICA

**Carlos Bastien**

ISEG

Bento de Jesus Caraça (1901-1948) foi essencialmente um matemático cuja obra multifacetada incluiu algumas incursões no campo da economia política. Essas incursões, em alguns aspectos inovadoras, reportaram-se numa primeira fase ao sistema teórico neoclássico e, numa segunda fase, à econometria. Marginalmente, reportaram-se também ao sistema teórico marxista. Em (quase) todos os casos privilegiaram uma abordagem formalizada da economia, ignorando as problemáticas cujo tratamento matemático se afigurava difícil ou impossível.

## A INTERPRETAÇÃO DE ELEMENTOS III.2. POR AUTORES PORTUGUESES DO SÉCULO XVI

**Bernardo Mota**

Faculdade de Letras de Lisboa/CIUHCT

Em Sobre o Céu (II.4 287b4-14), Aristóteles pretende provar que a superfície da água é esférica utilizando um argumento matemático que se pode relacionar com a segunda proposição do terceiro livro dos Elementos (“Se se tomarem ao acaso dois pontos na circunferência de um círculo, a recta que une os pontos cairá no interior do círculo”). Uma versão mais precisa da prova aristotélica é elaborada por Adrasto e reproduzida por Teão de Esmirna (Exposição das coisas matemáticas úteis para compreender Platão, capítulo “Sobre a forma da terra”). Arquimedes prova o mesmo resultado no seu Sobre os corpos flutuantes,

I.2. Estes autores reflectem sensibilidades diferentes em relação à matemática. A prova aristotélica relaciona a demonstração matemática com uma demonstração física, mas tem a precaução de separar os respectivos campos de investigação, ao vincular a “aplicabilidade” do resultado matemático à veracidade de uma assumpção física; ou seja, Aristóteles explicita a visão do filósofo natural. A prova euclidiana é feita no âmbito da matemática pura e não se preocupa com aplicações ao mundo da realidade. A prova arquimediana pertence à estática, ou seja, defende uma posição mais próxima de um físico-matemático.

Nos séculos XVI e XVII, dois autores portugueses com posições antagónicas sobre o valor da matemática clarificam o seu pensamento ao comentarem o passo aristotélico e a prova euclidiana referida. O objectivo de Diogo de Sá, o autor de uma obra intitulada *De Navigatione libri tres...* (Paris, 1549), é criticar Pedro Nunes, realçando que um matemático não consegue explicar o mundo tão bem como um filósofo natural. João Delgado, matemático jesuíta (-1612), assume a interpretação arquimediana sobre o papel da matemática. A comunicação explicará os argumentos em que cada um fundamenta a sua posição.

## DESCOBERTA DAS ÓRBITAS ELÍPTICAS POR JOHANNES KEPLER - EXEMPLO PEIRCEANO DO RACIOCÍNIO ABDUTIVO

**Ana Paula Silva**

Escola Secundária Cacilhas Tejo

A par da dedução e da indução, Charles Sanders Peirce propõe uma outra forma de raciocínio: o raciocínio abductivo ou abdução. Segundo Peirce, todas as novas ideias em ciência surgem através da abdução - processo pelo qual são colocadas hipóteses explicativas para explicar fenómenos surpreendentes. Uma inferência abductiva tem a seguinte forma: “O facto surpreendente C é observado:

Mas se A ( hipótese explicativa) fosse verdadeiro, C seria natural;

Donde há razão para suspeitar-se que A é verdadeiro.” (CP 5.189)

A abdução contém ou é, em si mesma, algo extraordinariamente poderoso: é “o quase raciocínio” responsável por todas as descobertas. Embora a conclusão de uma abdução seja apenas conjectural, incerta e limitada, pois não possui qualquer poder de prova ou demonstração,

é a única operação lógica que introduz qualquer ideia nova.

Não é por acaso que Peirce toma Johannes Kepler e a sua descoberta das órbitas elípticas como um exemplo principal de abdução, o “exemplo eterno” de raciocínio científico. No entanto é pertinente levantar as seguintes questões:

Por que está Peirce tão interessado no exemplo de Kepler?

Por que escolhe uma descoberta com 300 anos como o melhor, eterno exemplo do seu conceito de abdução? Como é que o exemplo da grande descoberta científica de Kepler pode iluminar a natureza problemática, quase paradoxal, da abdução?

## A ACADEMIA REAL DE MARINHA E COMÉRCIO DA CIDADE DO PORTO: UM CASO PECULIAR ENTRE AS ACADEMIAS PORTUGUESAS DO SÉCULO XIX

**Hélder Pinto**

Faculdade de Ciências de Lisboa

A Academia Real de Marinha e Comércio da Cidade do Porto, criada em 1803 pelo príncipe regente D. João VI e substituída, em 1837, pela Academia Politécnica do Porto é a primeira instituição de ensino superior da cidade do Porto. A fundação da ARMCCP assenta em duas aulas que se realizavam por essa altura na cidade do Porto: a Aula de Náutica (criada em 1762) e na Aula de Debuxo e Desenho (1779). Estas duas aulas, tal como a própria ARMCCP, eram da total responsabilidade da Companhia Geral da Agricultura das Vinhas do Alto-Douro (CGAVAD), com excepção da nomeação dos Lentes que apenas o rei podia efectuar - mas, em geral e até à subida de D. Miguel ao trono, as nomeações provenientes do poder real não eram mais do que a formalização legal das escolhas da CGAVAD. Para além destas aulas já existentes, a ARMCCP acrescentou ainda as aulas de Matemática, de Comércio, de Língua Inglesa e de Língua Francesa. Segundo o Alvará de 29 de Julho, decidiu-se também “addicionar-lhe huma outra Aula para as Lições de hum curso de Filosofia Racional e Moral, assim como outra de Agricultura, que deverá ser frequentada quando as circunstancias o permittirem” (esta última aula, apesar de algumas tentativas, nunca se enraizou). O que sobressai dos estatutos da ARMCCP é a relevância da Matemática no currículo desta instituição como atestam,

por exemplo, a existência de três anos matemáticos - na Universidade de Coimbra, cuja Reforma Pombalina de 1772 tinha criado a Faculdade de Matemática, eram quatro. A produção matemática dos elementos que compunham a ARMCCP não foi muito extensa - por exemplo, nenhum dos seus Lentes de Matemática era doutorado pela Universidade e apenas dois deles eram sócios correspondentes da Academia Real das Ciências - mas serviu para começar a quebrar a “bicefalia matemática” protagonizada por Coimbra e Lisboa. Começava assim o ensino (superior) da Matemática na cidade do Porto.

## 5.8 Investigação Operacional

Org. **Joaquim João de Alarcão Júdice** (FCT-UC,IT-UC)

Joaquim.Judice@co.it.pt

(com a colaboração da Associação

Portuguesa de Investigação Operacional)

### 8 de Julho, 5<sup>a</sup> feira, 17h00-18h15 (Sessão temática I)

17h00-17h20 Pedro Moura e Luís Gouveia: *Árvores com custos dependentes do grau dos nodos: Uma reformulação de Knapsack*

17h25-17h45 Luís Merca Fernandes, Joaquim J. Júdice, António Pais Antunes e Hanif D. Sherali: *Um Algoritmo de Pesquisa em Árvore com Limites para um Modelo de Localização Não-Linear*

17h50-18h15 Augusto M. J. Eusébio: *Problemas de fluxos em redes, com mais de um objectivo*

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 10h20-11h35 (Sessão temática II)

10h20-10h40 Isabel Ribeiro: *Programação Matemática com Restrições de Complementaridade na Resolução de Problemas de Engenharia Civil*

10h45-11h05 Carmo Brás, Joaquim Júdice e Silvério Rosa: *Solução de problemas de desigualdades variacionais no simplex com aplicação no problema complementar de valores próprios*

11h10-11h35 Cristiana J. Silva: *Pontos Conjugados para problemas de controlo óptimo de tempo mínimo bang-bang*

**9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 11h45-13h00** (Sessão temática III)

11h45-12h05 Pedro Oliveira e Lino Costa: *Algoritmos Evolutivos e Optimização Multiobjective*

12h10-12h30 João Paulo Costa e Maria João Alves: *Pontos de Referência em Programação Linear Fraccionária Multiobjective: um algoritmo de Ramificação e Corte*

12h35-13h00 M. Fernandes e V. Bushenkov: *An Algorithm for Constructing Pareto Frontier of Multicriteria Integer Problems*

**9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 16h30-17h45** (Sessão temática IV)

16h30-16h50 João Almeida, Marta Castilho Gomes e João Quinhones Levy: *Modelo de optimização para a gestão de resíduos hospitalares perigosos*

16h55-17h15 Paulo Morais e Ana Camanho: *Avaliação de Desempenho das Cidades Europeias: Promover o Incremento da Qualidade de Vida Urbana*

17h20-17h45 Fernanda A. Ferreira: *Licenciamento de patentes num mercado internacional com bens diferenciados*

## ÁRVORES COM CUSTOS DEPENDENTES DO GRAU DOS NODOS: UMA REFORMULAÇÃO DE KNAPSACK

**Pedro Moura e Luís Gouveia**

Univ. de Lisboa, Fac. Ciências, DEIO & CIO

O Problema da Árvore de Suporte com restrição de Grau (PASG) consiste em determinar a árvore de suporte de custo mínimo satisfazendo a condição adicional de que o grau máximo em cada vértice não excede um dado valor fixo. No presente trabalho considera-se uma generalização deste problema em que a função objectivo envolve custos modulares associados ao grau de cada vértice, para além dos custos associados às arestas. De seguida, mostra-se que o problema pode ser visto como a intersecção de um Problema de Árvore de Suporte com um Problema de Mochila e, num espaço de maior dimensão, como a intersecção de um Problema de Árvore de Suporte com um Problema de Mochila de Escolha Múltipla. Com base nestas decomposições são apresentados vários modelos de Programação Linear em conjunto com alguns conjuntos de desigualdades válidas, cujas relaxações lineares respectivas são de seguida comparadas usando um conjunto de instâncias de teste.

## UM ALGORITMO DE PESQUISA EM ÁRVORE COM LIMITES PARA UM MODELO DE LOCALIZAÇÃO NÃO-LINEAR

**Luís Merca Fernandes<sup>(a)</sup>, Joaquim J. Júdice<sup>(b)</sup>, António Pais Antunes<sup>(c)</sup> e Hanif D. Sherali<sup>(d)</sup>**

<sup>(a)</sup>Instituto Politécnico de Tomar e Instituto de Telecomunicações, Portugal

<sup>(b)</sup>Universidade de Coimbra e Instituto de Telecomunicações, Portugal

<sup>(c)</sup>Universidade de Coimbra, Portugal

<sup>(d)</sup>Virginia Tech, Blacksburg, USA

Nesta comunicação é apresentado um modelo de localização discreto que tem como objectivo determinar o número, a localização e a dimensão dos equipamentos maximizando a procura. É assumido que a procura dos serviços oferecidos pelos equipamentos é sensível à distância e à atractividade dos equipamentos. É introduzida uma formulação de Optimização Não Linear Mista (MINLP) e um algoritmo de pesquisa em árvore com limites (branch-and-bound) que se prova possuir convergência para um óptimo global. É apresentada alguma



experiência computacional com uma implementação do algoritmo em GAMS/MINOS para ilustrar a eficiência e eficácia do algoritmo.

Palavras-Chave: Programação Não-Linear; Optimização Global; Modelo de Localização

## PROBLEMAS DE FLUXOS EM REDES, COM MAIS DE UM OBJECTIVO

**Augusto M. J. Eusébio**

aeusebio@estg.iplei.pt

Instituto Politécnico de Leiria, Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Centro de Estudos de Gestão do Instituto Superior Técnico (CEG-IST)

Os problemas de programação linear com mais de um objectivo assumiram grande interesse, depois de se ter percebido que um único objectivo não traduz a realidade de muitos dos problemas com que nos deparamos no nosso dia-a-dia. O conceito de solução óptima teve de ser repensado, devido à frequente conflituosidade dos objectivos, adoptando-se o conceito de solução eficiente atribuído a Pareto. À semelhança do caso com um único objectivo, também no caso multi-objectivo se procuram algoritmos mais eficientes para casos particulares da programação linear, como é o caso dos problemas de fluxos em redes. No caso dos problemas com um único objectivo são conhecidos vários algoritmos para a resolução do problema de fluxo de custo mínimo numa rede, entre eles, o algoritmo simplex para redes, um dos que se revelou mais eficaz na prática (Bazaraa *et al.*, 1990). Nesta comunicação faremos uma revisão sobre problemas multi-objectivo de fluxos em redes, em particular, de algoritmos exactos tanto para o problema linear, como para o problema inteiro.

## PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM RESTRIÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA CIVIL

**Isabel Ribeiro**

iribeiro@fe.up.pt

Secção de Matemática, Departamento de Engenharia Civil,  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

A Programação Matemática com Restrições de Complementaridade (PMRC) é uma das áreas mais importantes da optimização, não só pelo seu elevado número de aplicações, mas também pela sua importância para a determinação de óptimos globais de vários problemas de optimização NP-difíceis. Nesta comunicação, um algoritmo de restrições activas para a determinação de um ponto estacionário de um PMRC e um algoritmo sequencial complementar para o cálculo de um seu mínimo global são primeiramente descritos e analisados. Seguidamente são descritos dois modelos de aplicação de PMCR em engenharia civil, nomeadamente um modelo de controlo de tráfego e outro de optimização topológica. Alguma experiência computacional na resolução desses modelos é finalmente apresentada, ilustrando as suas validades na prática e a eficiência das técnicas discutidas.

Palavras-chave: Optimização Global, Complementaridade, Controlo de Tráfego, Optimização Estrutural.

## SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DESIGUALDADES VARIACIONAIS NO SIMPLEX COM APLICAÇÃO NO PROBLEMA COMPLEMENTAR DE VALORES PRÓPRIOS

**Carmo Brás<sup>(a)</sup>, Joaquim Júdice<sup>(b)</sup>, Silvério Rosa<sup>(c)</sup>**

mb@fct.unl.pt, Joaquim.Judice@co.it.pt, rosa@ubi.pt

<sup>(a)</sup>Departamento de Matemática, FCT, Universidade Nova de Lisboa

<sup>(b)</sup>Universidade de Coimbra e Instituto de Telecomunicações

<sup>(c)</sup>Universidade da Beira Interior

Nesta comunicação é investigada a resolução do problema de desigualdades variacionais através da função mérito gap-regularizada. São discutidos dois processos para a sua resolução: um algoritmo de projecção da função gap-regularizada e o método Josephy-Newton modificado. A equivalência do problema complementar de valores próprios

(Eicp) a um problema de desigualdades variacionais no simplex, permite a aplicação da referida metodologia na resolução do Eicp. O desempenho dos algoritmos é ilustrado com resultados numéricos.

Palavras-Chave: Desigualdades Variacionais; Complementaridade; Programação Não Linear.

## PONTOS CONJUGADOS PARA PROBLEMAS DE CONTROLO ÓPTIMO DE TEMPO MÍNIMO BANG-BANG

**Cristiana J. Silva**

cjoasilva@ua.pt

Universidade de Aveiro e Universidade de Orléans (França)

Consideramos o problema de controlo óptimo de tempo mínimo para sistemas de controlo em  $\mathbb{R}^n$  do tipo  $\dot{x} = X(x) + u_1 Y_1(x)$  com condições inicial e final fixas  $x(0) = \hat{x}_0$ ,  $x(t_f) = \hat{x}_1$ , e onde o controlo  $u_1(t) \in R$  satisfaz a restrição  $|u_1(t)| \leq 1$  para  $t \in [0, t_f]$ . Interessamo-nos na determinação do primeiro tempo conjugado para estes problemas cujos controlos óptimos são do tipo bang-bang. No caso bang-bang, a teoria dos pontos conjugados é bem conhecida (ver, por exemplo, [2, 4, 6, 7]), mas estes resultados são de difícil implementação numérica. No entanto, quando os controlos óptimos são funções diferenciáveis em relação a  $t$ , resultados teóricos e práticos são bem conhecidos (ver, por exemplo, [1, 5]) e estão disponíveis ferramentas que permitem a computação de tempos conjugados (ver [3]). O nosso objectivo é desenvolver procedimentos que permitam a utilização destas ferramentas na determinação de tempos conjugados para controlos óptimos bang-bang. Para isso, para  $\varepsilon > 0$  pequeno e  $Y_1, \dots, Y_m$  campos de vectores arbitrários, consideramos o problema de tempo mínimo para o sistema  $\dot{x}^\varepsilon = X(x^\varepsilon) + u_1^\varepsilon Y_1(x^\varepsilon) + \varepsilon \sum_{i=2}^m u_i^\varepsilon Y_i(x^\varepsilon)$ , sob a restrição  $\sum_{i=1}^m (u_i^\varepsilon)^2 \leq 1$ , e com as condições de fronteira do problema inicial  $x^\varepsilon(0) = \hat{x}_0$ ,  $x^\varepsilon(t_f) = \hat{x}_1$ . Provamos (ver [10]), sob hipóteses convenientes, que os controlos óptimos do problema precedente são funções diferenciáveis de  $t$  que convergem fortemente para o controlo óptimo do problema inicial, quando  $\varepsilon$  tende para 0. Mais ainda, provamos que as trajectórias  $x^\varepsilon(\cdot)$  e os vectores adjuntos  $p^\varepsilon(\cdot)$  associados ao controlo suave  $u^\varepsilon(\cdot)$  convergem uniformemente em  $[0, t_f]$  para a trajectória  $x(\cdot)$  e o vector adjunto  $p(\cdot)$ , respectivamente, associado ao controlo óptimo

$u_1(\cdot)$ , quando  $\varepsilon$  tende para 0. Provamos também (ver [11]) que, quando  $\varepsilon$  tende para 0, o primeiro tempo conjugado  $t_c^\varepsilon$  ao longo da trajectória localmente óptima  $x^\varepsilon(\cdot)$  converge para o primeiro tempo conjugado  $t_c$  ao longo da trajectória localmente óptima  $x(\cdot)$ . Consequentemente, obtemos um método que permite a determinação de tempos conjugados para problemas de controlo óptimo bang-bang.

Palavras-Chave: Controlo óptimo, problema de tempo mínimo, controlos bang-bang, tempos conjugados.

## Referências

- [1] A. Agrachev, Y. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 87, Control Theory and Optimization, II, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [2] A. Agrachev, G. Stefani, P. Zezza, *Strong optimality for a bang-bang trajectory*, SIAM J. on Control and Optimization **41** (2002), no. 4, 991–1014.
- [3] B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Second Order Optimality Conditions in the Smooth Case and Applications in Optimal Control*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 13, 2 (2007), 207–236.
- [4] H. Maurer, N.P. Osmolovskii, *Second order sufficient conditions for time-optimal bang-bang control problems*, SIAM Journal on Control and Optimization **42** (2004), 2239–2263.
- [5] A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, *Calculus of Variations and Optimal Control*, Transl. Math. Monogr. 180, AMS, Providence, RI (1998).
- [6] J. Noble, H. Schättler, *Sufficient conditions for relative minima of broken extremals in optimal control theory*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 98–128.
- [7] L. Poggiolini, G. Stefani, *State-local optimality of a bang-bang trajectory: a Hamiltonian approach*, Systems and Control Letters **53** (2004), 269–279.
- [8] A. V. Sarychev, *The index of second variation of a control system*, Matem. Sbornik **113** (1980), 464–486. English transl. in: Math. USSR Sbornik **41** (1982), 383–401.

- [9] C. J. Silva, D. F. M. Torres, E. Trélat, *O controlo óptimo e as suas múltiplas aplicações*, Bol. Soc. Port. Mat. **61** (2009), 11–37.
- [10] C. J. Silva, E. Trélat, *Smooth regularization of bang-bang optimal control problems*, IEEE - Transactions on Automatic Control, in press.
- [11] C. J. Silva, E. Trélat, *Asymptotic approach on conjugate points for minimal time bang-bang control problems*, preprint <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00477008/fr/>.

## ALGORITMOS EVOLUTIVOS E OPTIMIZAÇÃO MULTIOBJECTIVO

**Pedro Oliveira e Lino Costa**

Departamento de Produção e Sistemas, Universidade do Minho

Muitos dos problemas de optimização em engenharia não possuem as propriedades de diferenciabilidade e convexidade, tornando-se assim intratáveis com os algoritmos convencionais de optimização. Nesta situação, podem ser utilizados algoritmos capazes de lidar com problemas que não possuam essas propriedades, como é o caso dos algoritmos evolutivos que utilizam os valores da função objectivo para avaliarem a progressão para o óptimo, que geram novas soluções a partir de regras probabilísticas e trabalham com populações de pontos e não a partir de uma solução singular. Os algoritmos evolutivos, dado usarem populações de pontos são menos propensos a ficarem retidos em óptimos locais e podem, por isso, ser utilizados em optimização global e na resolução de problemas de optimização multiobjectivo. Serão apresentadas aplicações de algoritmos evolutivos em optimização monobjectivo e multiobjectivo. Abordar-se-á também o problema de redução de dimensionalidade em problemas multiobjectivo.

## PONTOS DE REFERÊNCIA EM PROGRAMAÇÃO LINEAR FRACCIONÁRIA MULTIOBJECTIVO: UM ALGORITMO DE RAMIFICAÇÃO E CORTE

**João Paulo Costa e Maria João Alves**

jpaulo@fe.uc.pt, mjalves@fe.uc.pt

Faculdade de Economia, Universidade de Coimbra/INESC-Coimbra

A programação linear fraccionária (LFP) é um ramo da programação matemática onde a função (objectivo) a otimizar é constituída por um rácio em que tanto o numerador como o denominador são funções afins. Em programação linear fraccionária multiobjectivo (MOLFP) consideram-se explicitamente duas ou mais funções objectivo de LFP. Desta forma conseguem-se construir modelos de decisão em que os objectivos, cuja optimização é potencialmente conflituosa, são explicitados de forma independente, cabendo ao agente de decisão encontrar um compromisso entre as diferentes tendências ou conflitos. Só em casos muito particulares, e apelidados de triviais, uma solução admissível do problema optimiza simultaneamente todos os objectivos relevantes. Nestas circunstâncias o conceito de óptimo não pode ser utilizado. Procura-se, isso sim, soluções que respeitando o paradigma da optimização - se todos os factores e restrições relevantes forem considerados, nenhum agente de decisão poderá ficar satisfeito com menos do que o óptimo - expressem um compromisso entre os diferentes objectivos explicitados: soluções eficientes. Uma solução eficiente não permite a existência de nenhuma outra que seja simultaneamente melhor ou idêntica em todos os objectivos, sendo pelo menos num objectivo estritamente melhor. Uma solução eficiente cumpre também a condição mais fraca de não permitir a existência de outras soluções que sejam estritamente melhores simultaneamente em todas as funções objectivo, condição que define as chamadas soluções fracamente eficientes. No entanto esta condição fraca é também cumprida por soluções que sendo idênticas numas funções objectivo são piores noutras, pelo que são dominadas, não respeitando o paradigma da optimização.

Em (MOLFP) as técnicas de ponto de referência são muito úteis pois permitem o cálculo de soluções eficientes não suportadas (soluções que não se conseguem alcançar através da optimização de somas pesadas das funções objectivo). As soluções não suportadas constituem muitas vezes compromissos mais interessantes do que as soluções suportadas para os problemas em causa. Para além disso, o conjunto de soluções eficientes de um problema de MOLFP é constituído por uma parte

significativa de soluções não suportadas.

Genericamente, as técnicas de ponto de referência utilizam funções escalarizantes de realização (achievement scalarizing functions - ASF) que transformam o problema multiobjectivo num problema escalar em que se pretende otimizar a ASF. Estas ASF estabelecem uma relação de ordem para as soluções eficientes, baseada na sua proximidade ao ponto, do espaço dos objectivos, que o agente de decisão tem por referência. Para que estas técnicas garantam que as soluções são eficientes, as ASF necessitam de possuir pelo menos uma parcela constituída pela soma de todas as funções objectivo do problema. De outra forma, apenas garantem que as soluções calculadas são fracamente eficientes. Em MOLFP a soma das funções objectivo conduz a um problema muito difícil de resolver (também conhecido como o problema da “sum-of-ratios”) que é essencialmente NP-hard.

Iremos apresentar um algoritmo de ramificação e limitação (Branch & Bound), desenvolvido em trabalhos prévios dos autores, onde agora se introduzem certos tipos de corte. Estes cortes sobre a região admissível são introduzidos sob a forma de restrições lineares, para não aumentar a complexidade, e são baseados em condições que identificam partes da região admissível a que a solução eficiente que procuramos (a que otimiza a ASF) não pode pertencer. Estes cortes, implementados numa técnica de ramificação e corte (Branch & Cut) melhoram substancialmente o desempenho da técnica de Branch & Bound desenvolvida anteriormente. Serão apresentados alguns resultados computacionais indicando o desempenho desta nova técnica de Branch & Cut.

## AN ALGORITHM FOR CONSTRUCTING PARETO FRONTIER OF MULTICRITERIA INTEGER PROBLEMS

**M. Fernandes e V. Bushenkov**

Universidade de Évora

An algorithm for constructing the Pareto Frontier of multicriteria integer problems is presented. As known, the feasible set in the criteria space for integer programming problems is not convex and only a few points of its Pareto frontier can be found when constructing its convex hull (so called supported points). To find the other points, we decompose the original problem and construct the Edgeworth-Pareto

Hulls (EPHs) for some series of sub-problems. Constraints for new sub-problems are formed on the base of vertices and hyperplanes of EPHs constructed for previous sub-problems. The proposed algorithm can be applied for the criterion space till 4-5 dimensions. It can be useful for Decision Support Systems in such areas as forest planning and management, water resources management and etc.

## MODELO DE OPTIMIZAÇÃO PARA A GESTÃO DE RESÍDUOS HOSPITALARES PERIGOSOS

**João Almeida, Marta Castilho Gomes e João Quinhones Levy**

joao.n.almeida@hotmail.com, marta.gomes@ist.utl.pt, levy@civil.ist.utl.pt

CESUR, Instituto Superior Técnico

A gestão de resíduos hospitalares é uma área muito particular da gestão de resíduos sólidos pois este tipo de resíduos está sujeito a regras específicas referentes ao tratamento e eliminação. Em Portugal a legislação divide os resíduos hospitalares perigosos (RHP) em dois grupos: os que têm de ser descontaminados antes de poderem ser transportados para aterros (grupo III) e os que são de incineração obrigatória (grupo IV). As operadoras licenciadas trabalham com ambos os grupos em simultâneo. Dado que a produção ultrapassou a capacidade de incineração existente, é urgente de expandir essa capacidade de forma a reduzir os movimentos transfronteiriços de RHP.

Neste trabalho desenvolve-se um modelo de programação linear inteira mista (MILP) para a gestão integrada de RHP em Portugal. O modelo optimiza os custos de construção e operação das diferentes infra-estruturas da rede (estações de transferência, centros de eliminação do grupo III e do grupo IV - incineradoras), permitindo obter a localização das mesmas assim como determinar os fluxos de resíduos entre os diferentes nós. Foi aplicado a dois cenários, usando dados reais do sector: no primeiro são variáveis do modelo todos os tipos de infra-estruturas; o segundo tem em conta as infra-estruturas existentes variando apenas a localização das incineradoras.

Os resultados obtidos permitem apoiar a discussão actualmente em curso sobre a localização das unidades de incineração de RHP a construir no País para substituição da instalação existente em Lisboa.

Palavras-Chave: Gestão de resíduos sólidos, programação linear inteira mista (MILP), resíduos hospitalares perigosos.



## AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DAS CIDADES EUROPEIAS: PROMOVER O INCREMENTO DA QUALIDADE DE VIDA URBANA O

**Paulo Morais e Ana Camanho**

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Este artigo explora as potencialidades do DEA na medição da qualidade de vida e na avaliação de desempenho dos gestores de cidades no que diz respeito à promoção da qualidade de vida urbana. Usando os dados do programa Urban Audit, da União Europeia, foi definido o perfil de cidade (city profile) no que diz respeito à qualidade de vida de 206 cidades. São apresentadas duas abordagens: uma primeira, consiste na construção de um indicador compósito para a qualidade de vida; a segunda propõe a avaliação do desempenho dos gestores locais para promover a qualidade de vida, dadas as condições económicas do país, contextualizada pelo PIB per capita. Os resultados identificam as cidades com as melhores práticas urbanas e apresentam um modelo de intervenção para as cidades consideradas ineficientes utilizando benchmarking.

## LICENCIAMENTO DE PATENTES NUM MERCADO INTERNACIONAL COM BENS DIFERENCIADOS

**Fernanda A. Ferreira**

fernandaamelia@eu.ipp.pt

ESEIG/Instituto Politécnico do Porto e CMUP

Estudamos os efeitos que a entrada de uma empresa estrangeira provoca no bem-estar doméstico, quando em presença de licenciamento, num mercado de bens diferenciados. Consideramos também que a empresa entrante é tecnologicamente superior à incumbente. Fazendo a análise de dois tipos de licenciamento, taxa fixa ou taxa unitária de produção, mostramos que a entrada da empresa estrangeira aumenta o bem-estar doméstico, no caso de as diferenças tecnológicas entre as duas empresas serem suficientemente grandes. Verificamos, ainda, que, uma vez que um aumento da diferenciação dos produtos reduz a concorrência entre as empresas, a possibilidade de licenciamento aumenta.

## 5.9 Probabilidades e Estatística

Org. **Manuela Neves** (ISA-UTL)

manela@isa.utl.pt

(com a colaboração da Sociedade Portuguesa de Estatística)

### 8 de Julho, 5<sup>a</sup> feira, 17h00-18h15 (Sessão temática I)

17h00-17h20 Teresa A. Oliveira: *Planos em blocos incompletos equilibrados e parcialmente equilibrados (BIB e PBIB Designs): na fronteira entre a Estatística e a Matemática*

17h25-17h45 António St.Aubyn e Elsa Gonçalves: *Modelos mistos na Estatística Aplicada*

17h50-18h15 Francisco Lage Calheiros: *Autómatos celulares estocásticos: simulação e misturas*

### 9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 10h20-11h35 (Sessão temática II)

10h20-10h40 M. Ivette Gomes: *Estimação adaptativa, invariante e de viés-reduzido do índice de valores extremos*

10h45-11h05 João A. Branco: *Como é que a Estatística se distingue da Matemática, e quais as consequências da diferença?*

11h10-11h35 Maria de Fátima Brilhante, Dinis Duarte Pestana e Maria Luísa Rocha: *Betices*

**9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 16h30-17h45** (Sessão temática IV)

16h30-16h45 Sílvia da Conceição Gonçalves Fecheira: *Ensinar Estatística nos dias de hoje (Aplicação do software SPSS no ensino Secundário)*

16h50-17h05 Ayana Mateus e Margarida Tomé: *Distribuição de diâmetros com base na amostra censurada*

17h10-17h25 Rita Susana dos Santos Moreira: *Uma aplicação do modelo de regressão linear múltipla à taxa de insucesso escolar em matemática*

17h30-17h45 Miguel Martins Felgueiras: *Misturas de gaussianas e distribuição t de Student em Finanças*

**10 de Julho, Sábado, 14h30-15h45** (Sessão temática V)

14h30-14h50 Miguel de Carvalho, Paulo C. Rodrigues e António Rua: *O filtro espectral singular e a datação do ciclo económico dos EUA*

14h55-15h15 Ana Paula Martins: *O índice de cruzamentos: propriedades e inferência*

15h20-15h45 Nuno Sepúlveda: *Um chute na biodiversidade: quando a Liga Sagres encontra a Ecologia*

**10 de Julho, Sábado, 16h00-17h15** (Sessão temática VI)

16h00-16h15 Frederico Caeiro e Dora Prata Gomes: *Estimação semi-paramétrica de quantis elevados usando o método dos momentos ponderados de probabilidade*

16h20-16h35 Luís Manuel Mendes da Costa: *Algumas propriedades assintóticas dos estimadores Jackknife*

16h40-16h55 José António Santos e M. Manuela Neves: *Um modelo semi-paramétrico de regressão logística*

17h00-17h15 Montezuma Dumangane and Nicoletta Rosati: *Estimation of a quarterly model with annual sample selection*

## PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS E PARCIALMENTE EQUILIBRADOS (BIB E PBIB DESIGNS): NA FRONTEIRA ENTRE A ESTATÍSTICA E A MATEMÁTICA

**Teresa A. Oliveira**

toliveir@univ-ab.pt

CEAUL e Universidade Aberta

Em Estatística, na área do Planeamento de Experiências, é bem conhecida a importância dos Planos em Blocos Incompletos, Equilibrados e Parcialmente Equilibrados. Para além das propriedades óptimas em Estatística e das aplicações nas mais diversas áreas da Ciência, nestes Planos são de extrema relevância as ligações evidenciadas na Matemática Pura e Aplicada. Procuramos explorar algumas dessas ligações, privilegiando os ramos da Álgebra, Geometria, Análise Combinatória, Teoria dos Grafos e Optimização, ilustrando com exemplos.

## MODELOS MISTOS NA ESTATÍSTICA APLICADA

**António St.Aubyn<sup>(a)</sup> e Elsa Gonçalves<sup>(b)</sup>**

<sup>(a)</sup>Instituto Superior de Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa;  
Centro de Investigação em Turismo, Inovação e Serviços (CITIS), Universidade  
Lusíada de Lisboa

<sup>(b)</sup>Centro de Botânica Aplicada à Agricultura (CBAA), Instituto Superior de  
Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa

A análise de variância introduzida por Fisher nos anos vinte do século passado, foi o primeiro instrumento largamente utilizado na investigação aplicada, particularmente na agricultura. A introdução dos chamados efeitos aleatórios na análise da variância, que permitiu estimar diversas componentes de variância por via do método dos mínimos quadrados, originou progressos em várias áreas, particularmente na genética quantitativa, com repercussões no melhoramento genético animal e vegetal.

Os problemas a resolver foram-se tornando cada vez mais complexos, tornando os modelos iniciais pouco flexíveis e intratáveis pela metodologia dos mínimos quadrados e com os instrumentos de cálculo disponíveis na época.

Com o aparecimento de novas técnicas de cálculo científico, a análise de regressão incorporou as variáveis qualitativas, quer como regressoras,

quer como variáveis resposta, e a análise de variância com efeitos fixos tornou-se uma aplicação desta técnica. Esta abordagem teve reflexos importantes no desenvolvimento de novas áreas científicas nas ciências sociais, em especial na economia, com a explosão da econometria.

Fisher em 1922 introduziu o método de máxima verosimilhança. Anderson e Bancroft em 1952 utilizaram pela primeira vez o método de máxima verosimilhança restrita (REML) em modelos equilibrados e, em 1971, Patterson e Thompson generalizaram-no para efeitos de modelos mistos. A conjugação do REML, método iterativo, com o grande progresso entretanto verificado nas técnicas de cálculo, provocou o desenvolvimento de modelos mistos cada vez mais complexos e a sua consequente aplicação nas mais diversas áreas.

Nesta comunicação apresentaremos a utilização da metodologia dos modelos mistos na análise de dados resultantes de grandes ensaios de clones de castas de videira, para estudar a variabilidade genética e fazer selecção massal genotípica: principais resultados.

## AUTÓMATOS CELULARES ESTOCÁSTICOS: SIMULAÇÃO E MISTURAS

**Francisco Lage Calheiros**

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto,

European Network for Environmental Assessment and Services (ENEAS)

As equações diferenciais formam um ramo “maduro” da Matemática Aplicada com grandes sucessos em muitos sistemas reais.

Quando o sistema não tem elementos infinitesimais mas átomos (hard-cores) autómatos celulares são uma alternativa.

Se o sistema não está homogeneamente misturado (mixed), por vezes não é fácil acomodar flutuações com equações diferenciais. Os autómatos celulares estocásticos acomodam facilmente flutuações e muitas vezes emergem descontinuidades indetectáveis com outros métodos. Mesmo quando há um bom modelo diferencial a necessidade de resultados numéricos implica simulações numéricas e por isso o sistema tem de ser discretizado.

Os autómatos celulares têm sido usados, pelo menos como método alternativo, para muitos sistemas reais, particularmente em sistemas com várias fases.

Organização do seminário:

1-Algumas definições e propriedades

2-Exemplos:

2.1.-Difusão de poluentes à superfície do mar;

2.2.-Dinâmicas florestais e fogos (com G. Oliveira);

2.3.-Fluxo de tráfego e ruído (com V. Fortuna);

2.4.-Epidemias, “social networks” (com C. Coutinho);

2.5.- Contracções uterinas (com A. Cavaleiro).

## ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA, INVARIANTE E DE VIÉS-REDUZIDO DO ÍNDICE DE VALORES EXTREMOS

**M. Ivette Gomes**

Universidade de Lisboa, DEIO (FCUL) e CEAUL

Para caudas direitas pesadas, i.e., para um parâmetro de forma positivo na função de distribuição geral de *valores extremos*, começamos por referir a metodologia PORT, do Inglês “*peaks over random thresholds*”, introduzida e estudada teorica e assintoticamente em Araújo Santos *et al.* (2006) e para amostras finitas em Gomes *et al.* (2008), e a sua utilização na estimação do *índice de valores extremos* (EVI, do Inglês “*extreme value index*”). Para além do usual parâmetro  $k$ , o número de estatísticas ordinais superiores envolvidas na estimação do EVI, os estimadores PORT dependem de um parâmetro adicional  $q$ ,  $0 \leq q < 1$ , que os torna altamente flexíveis e mesmo capazes de ultrapassar os estimadores de *variância-minima e viés-reduzido* (MVRB, do Inglês “*minimum-variance reduced-bias*”), de que referimos o mais simples, introduzido em Caeiro *et al.* (2005). Depois de nos dedicarmos à estimação MVRB adaptativa, i.e., à escolha de  $k$  através de métodos “bootstrap”, aproveitando os algoritmos em Gomes *et al.* (2009, 2010), avançamos com um algoritmo para estimação PORT-MVRB adaptativa, i.e. para a escolha simultânea de  $k$  e  $q$ , e com uma aplicação dessa metodologia aos dados ambientais anteriormente usados em Gomes *et al.* (2010).

### Referências

Araújo Santos, P., Fraga Alves, M.I. & Gomes, M.I. (2006). Peaks Over Random Threshold Methodology for Tail Index and High Quantile Estimation. *Revstat* 4:3, 227-247.

- Caeiro, F. Gomes, M. I. & Pestana, D. (2005). Direct reduction of bias of the classical Hill estimator. *Revstat* **3**:2, 111-136.
- Gomes, M. I., Fraga Alves, M.I. & Araújo Santos, P. (2008). PORT Hill and Moment Estimators for Heavy-Tailed Models. *Comm. Statist. - Simul. & Comput.* **37**:6, 1281-1306.
- Gomes, M.I., Mendonça, S. & Pestana, D. (2009). The Bootstrap Methodology and Adaptive Reduced-bias Tail Index and Value-at-Risk Estimation. Notas e Comunicações CEAUL 07/2009.
- Gomes, M.I., Figueiredo, F. & Neves, M. (2010). Adaptive Choice of Thresholds and the Bootstrap Methodology: an Empirical Study. Notas e Comunicações CEAUL 12/2010.

## COMO É QUE A ESTATÍSTICA SE DISTINGUE DA MATEMÁTICA, E QUAIS AS CONSEQUÊNCIAS DA DIFERENÇA?

**João A. Branco**

Departamento de Matemática e CEMAT, Instituto Superior Técnico

A ligação entre Estatística e Matemática nem sempre é feita de forma clara. Nesta apresentação apontam-se razões que explicam porque é que as duas disciplinas são claramente diferentes. A evidência de que a Estatística é distinta da Matemática não é aqui apresentada com o intuito de argumentar que a Matemática não é importante para a Estatística ou que a Estatística não deve fazer parte da formação em matemática e dos programas de matemática. Pelo contrário, a Estatística não sobrevive sem a Matemática e a Matemática tem muito a ganhar se encarar a Estatística como um campo ideal onde encontrar contextos com significado para os conceitos matemáticos. Marcar a diferença equivale a reconhecer que o ensino e a aprendizagem nas duas disciplinas tem de levar em conta essa diferença. E para que isso aconteça não podemos entender as ideias e conceitos estatísticos como se fossem conceitos matemáticos.

Palavras-Chave: Matemática, Estatística, ensino, aprendizagem.

## BETICES

Maria de Fátima Brilhante<sup>(a)</sup>, Dinis Duarte Pestana<sup>(b)</sup> e Maria  
Luísa Rocha<sup>(c)</sup>

<sup>(a)</sup>Universidade dos Açores, DM, e CEAUL

<sup>(b)</sup>Universidade de Lisboa, DEIO e CEAUL

<sup>(c)</sup>Universidade dos Açores, DEG e CEEAplA

Seja um teste de hipóteses  $(\mathbf{X}; H_0, H_A, \mathcal{C})$ , onde  $\mathbf{X}$  denota uma amostra aleatória,  $H_0$  e  $H_A$  a hipótese nula e a hipótese alternativa, respectivamente, e  $\mathcal{C}$ , um boreliano de  $\mathbb{R}^n$ , é a região crítica; em geral, usa-se uma estatística de teste  $T$  tal que  $\mathbb{P}[\mathbf{X} \in \mathcal{C} = \mathbb{P}[T(\mathbf{X}) \in \mathcal{C}^*]$ , em que  $\mathcal{C}^*$  é um boreliano de  $\mathbb{R}$ .

Se a distribuição amostral da estatística de teste  $T$  para  $F_T$ ,  $F_T(T) \stackrel{d}{=} 1 - F(T) \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ , e esta uniformidade dos valores de prova  $\{P_k\}_{k=1}^n$ , quando perspectivados como variáveis aleatórias é a base dos métodos usados na construção de um valor de prova combinado na avaliação meta-analítica de uma hipótese nula, harmonizando resultados de testes independentes. Consequentemente, o ajustamento por uma uniforme padrão ganhou um inesperado relevo.

As problema geral de escassez dos dados, junta-se em geral o do viés de publicação, um fenómeno generalizado decorrente de o comum das revistas em tenderem a publicar apenas trabalhos “com resultados significativos”. Abordamos por isso a questão numa dupla perspectiva: aumentar computacionalmente as amostras, e estudar situações alternativas em que, usando  $X \prec U$ , pseudo-valores de prova  $p$  tendam a acumular-se próximo de 0. Neste contexto, a vasta família das  $Beta(p, q)$ , com a sua riqueza de formas grande concentração de probabilidades próximo de 1 quando  $p \in (0, 1]$  e  $q > 1$ , é uma escolha evidente para investigação de alternativas credíveis.

No que se refere ao aumento computacional das amostras, usámos os seguintes resultados:

1. Sejam  $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$  e  $X$  com suporte em  $[0, 1]$  variáveis aleatórias independentes.  
Então  $W = \min\left(\frac{U}{X}, \frac{1-U}{1-X}\right) \sim \text{Uniforme}(0, 1)$  e  $V = U + X - \mathcal{I}[U + X] \sim \text{Uniforme}(0, 1)$  (onde  $\mathcal{I}[U + X]$  é a parte inteira de  $U + X$ ), qualquer delas independente de  $X$ .
2. Se  $X$ ,  $W$  e  $V$  forem uniformes padrões independentes, então  $Y = (XW)^V \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ .



Por outro lado, no que se refere a investigar modelos de base  $X \prec U$ , usámos a família de variáveis aleatórias  $X_m$  que são combinação linear convexa de uma uniforme com uma  $Beta(1, 2)$  se  $m \in [-2, 0)$ , ou  $Beta(2, 1)$  se  $m \in (0, 2]$ , com coeficientes de mistura  $1 - |\frac{m}{2}|$  e  $|\frac{m}{2}|$ , respectivamente. Note-se que se  $m \in [-2, 0)$  se tem  $X_m \prec U$ , e que  $m = 0$  corresponde a um modelo uniforme padrão.

Provámos que  $\min\left(\frac{X_m}{X_p}, \frac{1-X_m}{1-X_p}\right) \stackrel{d}{=} X_{\frac{mp}{6}}$ . Discutimos as consequências deste facto, conjuntamente com as propriedades extremas da uniforme padrão no que se refere à entropia, no que se refere ao aumento computacional de amostras e efeito perverso que este aumento pode ter na potência dos testes.

## ENSINAR ESTATÍSTICA NOS DIAS DE HOJE (APLICAÇÃO DO SOFTWARE SPSS NO ENSINO SECUNDÁRIO)

Sílvia da Conceição Gonçalves Fecheira<sup>1</sup>

Universidade Portucalense

O presente trabalho, de cariz investigatório, teve como principal objectivo descrever, compreender e inovar o ensino da Estatística no 10.º ano de escolaridade do Ensino Oficial português.

Tentamos mostrar o quanto **esta ciência é importante** na desenvoltura dos que se dizem o **futuro** do país, e dada a **discordância** generalizada quanto ao modo como a Estatística é ensinada (ou **ausência** desta) nas escolas.

Partindo de algumas ideias já experimentadas, tentamos conciliar um método diferenciado de ensino e aplicá-lo no ensino da Estatística Descritiva. Deste modo ambicionamos ultrapassar as tão referidas dificuldades sentidas pelos professores no ensino da Estatística, desenvolver o espírito crítico dos alunos, dando-lhes uma perspectiva diferenciada de aprendizagem.

Neste seguimento, desenvolvemos um **manual de aplicação dos conceitos necessários ao manuseamento do software SPSS**, pois entendemos que este tipo de ferramenta desperta nos alunos o entusiasmo pela disciplina, alargando os seus horizontes culturais, e com a intenção de que no futuro estes obtenham vantagens socioprofissionais.

<sup>1</sup>Sob orientação: Dr.ª Natércia Durão (Docente na Universidade Portucalense).

De forma a contribuir para atenuar as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Estatística, e por inerência na Matemática, foram também **propostas tarefas, metodologias e materiais, (apresentações sugestivas em PowerPoint, sobre os conteúdos teóricos necessários ao entendimento desta ciência, o que nos permitiu uma transmissão de conhecimentos rápida, segura, ilustrativa e atrativa)** que cremos, serem um meio impulsionador de captação da atenção e do interesse dos aprendizes.

Globalmente, o ensino da unidade revestiu um carácter elucidativo, tendo as suas opções metodológicas sido, essencialmente, influenciadas pela tentativa de almejar a melhor leccionação possível. Consideramos, por isso, que a experiência foi bastante favorável, tanto para os alunos como para o professor.

## DISTRIBUIÇÃO DE DIÂMETROS COM BASE NA AMOSTRA CENSURADA

**Ayana Mateus<sup>(a)</sup> e Margarida Tomé<sup>(b)</sup>**

amf@fct.unl.pt, magatome@isa.utl.pt

<sup>(a)</sup>CMA, Departamento de Matemática, FCT, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

<sup>(b)</sup>Centro de Estudos florestais (CEF)

ISA- Instituto Superior de Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa

Um modelo de simulação do crescimento da floresta que inclui como classe autónoma a simulação da distribuição de diâmetros apresenta grandes vantagens, pois permite calcular com uma maior precisão o volume por categorias de aproveitamento, sendo adicionalmente uma ferramenta na estimação da biomassa e dos stocks de carbono. Assim, construiu-se um modelo relativo à distribuição de diâmetros, em povoamentos de eucalipto, com recurso a uma função densidade de probabilidade. Sabendo-se que os inventários florestais não efectuam medições de árvores com diâmetros inferiores a um valor previamente determinado, mas verificando-se a existência de um interesse crescente de incluir as árvores de menores dimensões na avaliação dos povoamentos, principalmente nos stocks de carbono, surge a necessidade de desenvolver uma metodologia que permitisse estimar o volume e biomassa dessas árvores. Por outras palavras: se as únicas árvores que foram medidas, são as que possuem um diâmetro  $d > d_1$ , põe-se a

questão de saber, qual o volume e biomassa das árvores cujo diâmetro seja menor que  $d_1$ . Em trabalhos anteriores, verificou-se que a distribuição de diâmetros dos povoamentos de eucalipto pode ser modelada com uma função densidade de probabilidade, a Johnson  $S_B$ . Uma vez conhecidos os parâmetros da distribuição será possível estimar o valor do volume ou biomassa de qualquer povoamento, incluindo todas as árvores. Esta estimativa é geralmente conseguida, quando se dispõe da amostra completa, pelo método dos momentos, desde que se conheçam o diâmetro mínimo e máximo, o diâmetro quadrático médio, a área basal, a mediana e o n° de árvores por hectare. Neste trabalho faz-se um primeiro teste à possibilidade de simular a distribuição de diâmetros com base na amostra censurada que é recolhida nos inventários florestais.

## Referências

- [1] Gallant, A. Roland (1987) *Nonlinear Statistical Models*. John Wiley & Sons.
- [2] Fonseca T.F., Marques C.P. and Parresol B. R., 2009. Describing maritime pine diameter distributions with Johnson's  $S_B$  distribution using a new all-parameter recovery approach. *For.Sci.* 55(4):367-373.
- [3] Furtado, A. X., 2006. Modelação da estrutura dinâmica de povoamentos de *Eucalyptus Globulus* em primeira rotação. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. 192 p.

## UMA APLICAÇÃO DO MODELO DE REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA À TAXA DE INSUCESSO ESCOLAR EM MATEMÁTICA

**Rita Susana dos Santos Moreira**

ritamoreira@moveissanmiguel.pt

Escola Secundária de Lousada

O insucesso escolar continua a ser um problema nacional, para o qual as instituições de ensino devem estar atentas, procurando melhorar em qualquer momento a qualidade dos seus alunos. Esta responsabilidade pode ser assumida de várias formas, sendo uma delas a avaliação do desempenho curricular dos alunos, onde uma das vertentes da análise do desempenho curricular remete para a caracterização do insucesso escolar.

O desempenho escolar dos alunos na disciplina de Matemática é extremamente importante, uma vez que esta é uma disciplina fundamental no desenvolvimento das crianças e dos jovens. Ela faz-se presente em diversas actividades que possibilitam o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade e a capacidade de resolução de problemas, ampliando a possibilidade dos alunos compreenderem e transformarem a realidade. No entanto, o percurso da aprendizagem da Matemática não é fácil, quer para quem ensina, quer para quem se ensina. É necessário haver um esforço de aprendizagem para que o aluno adquira as bases necessárias para o ano seguinte e é também importante que o aluno perceba que aprender exige esforço, trabalho e persistência. Outro factor, que não é de menor importância, é o local onde se ensina. Todos estes pontos carecem de uma actualização constante, pelo que investigá-los deveria ser uma tarefa permanente.

Os professores devem estar atentos ao desenvolvimento dos seus alunos, qualquer que seja a escola ou o nível de ensino que estejam a leccionar, e realizar, sempre que possível, estudos que possibilitem a sua permanente actualização.

Assim, constatando-se uma elevada taxa de insucesso na disciplina de Matemática na Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos de Rebordosa, surgiu a necessidade de identificar os reais factores da situação.

Partindo de uma amostra de 199 alunos (dimensão escolhida ao acaso) distribuídos do 2.º ao 3.º ciclo (51 do 5º ano, 43 do 6º ano, 36 do 7º ano, 24 do 8º ano e 45 do 9º ano), a qual representou aproximadamente 27% dos alunos da Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos de Rebordosa, analisou-se o nível sócio-económico, o percurso escolar, a

identificação (sexo e ano de escolaridade), a motivação e a auto-estima, os hábitos de estudo, a envolvimento das famílias e a eficácia da Escola.

Os dados foram recolhidos em Junho de 2006 através de um questionário e para a análise e tratamento dos dados utilizou-se, como método estatístico, o modelo de regressão linear múltipla de forma a poder validar as relações escola-família, tendo em vista a sua implicação nos resultados escolares na disciplina de Matemática. Para processar os dados foi utilizado o software Statistical Package for the Social Sciences (SPSS 15.0).

A partir do modelo que procurou explicar o insucesso dos alunos da Escola Básica dos 2.º e 3.º ciclos de Rebordosa à disciplina de Matemática, constatou-se que os alunos, com melhores resultados no desempenho escolar na disciplina de Matemática, são aqueles cujas famílias estão envolvidas e manifestam interesse e gosto pela sua aprendizagem, mostram vontade de seguir um percurso escolar, não apresentam retenções, ocupam os tempos livres com actividades que os ajudam no seu desenvolvimento e as mães têm um maior nível de escolaridade. Por outro lado, os resultados escolares são piores nos alunos que pretendem trabalhar no final do 3º ciclo, e as sucessivas retenções, que actuam sobre a auto-estima e motivação para o estudo, levam a obter cada vez piores resultados, provocando o abandono escolar prematuro. O facto de as famílias não mostrarem interesse pela aprendizagem dos seus educandos é um dos factores de maior impacto nos fracos resultados obtidos na disciplina de Matemática.

Palavras-chave: Ensino da Matemática, Regressão Linear Múltipla

## MISTURAS DE GAUSSIANS E DISTRIBUIÇÃO $t$ DE STUDENT EM FINANÇAS

**Miguel Martins Felgueiras**

mfelg@estg.ipleiria.pt

CEAUL e ESTG do Instituto Politécnico de Leiria

Em finanças é habitual a análise da evolução dos índices de preços, nomeadamente de

$$x_t = \ln(X_t) - \ln(X_{t-1})$$

onde  $X_t$  representa o valor do índice no final do dia  $t$ . O ajustamento de modelos aos dados tem sido uma questão importante, e vários modelos

(habitualmente de caudas pesadas) têm sido considerados apropriados, tais como misturas de gaussianas,  $t$  de Student, estável paretiano, hiperbólico generalizado e logF generalizado, entre outros (Behr and Pötter, 2009; Kon, 1984; Fama, 1965).

Naturalmente que as misturas de gaussianas, pela sua flexibilidade, tendem a ser cada vez mais usadas, pois abarcam diversas combinações de assimetria e achatamento, sendo por isso úteis para analisar as especificidades dos diferentes índices. Têm ainda a vantagem de ter sempre variância finita (tal como a  $t$  de Student para  $n > 2$ ), o que não acontece, por exemplo, com a estável paretiana. No entanto, a mais valia obtida com a complexidade destes modelos pode ser questionável, nomeadamente quando os dados são aproximadamente simétricos. É ainda difícil escolher, de forma objectiva, o número de componentes da mistura.

Usando o sistema de Pearson, mostramos neste trabalho que quando as componentes da mistura têm a mesma média esta pode ser aproximada a uma  $t$  de Student, com parâmetros de localização e escala não estandardizados. Um exemplo da qualidade da aproximação é realizado utilizando os dados do S&P 500 stock index (1950 - 2009), que têm a vantagem de ser quase simétricos e com elevada kurtosis, independentemente do período de tempo considerado. Para estes dados, foram ajustadas misturas de gaussianas com duas, três e quatro componentes bem como a distribuição  $t$  de Student, com parâmetros de localização e escala não estandardizados. A comparação entre os modelos obtidos é realizada através das estatísticas AIC e BIC, verificando-se que o modelo  $t$  de Student é preferível em grande parte das situações.

Palavras-Chave: ajustamento de distribuições, sistema de Pearson, S&P 500 stock index.

## Bibliografia

- Behr, A., Pötter, U. (2009). Alternatives to the normal model of stock returns: gaussian mixture, generalized logF and generalized hyperbolic models. *Annals of Finance*, **5**, 49-68.
- Burnham, K., Anderson, D. (2002). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. New York: Springer-Verlag.
- Everitt, B. S., Hand D. J. (1981). *Finite Mixture Distributions*. London: Chapman & Hall.
- Fama, E. (1965). The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, **38**, 34-105.

- Frühwirth-Schnatter, S. (2006). *Finite Mixture and Markov Switching Models*. New York: Springer-Verlag.
- Johnson, N., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*. Volume I. New York: Wiley.
- Kon, S. (1984). Models of stock returns - a comparison. *Journal of Finance*, **39**, 1, 147-165.
- Sheskin, D. (2002). *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

## O FILTRO ESPECTRAL SINGULAR E A DATAÇÃO DO CICLO ECONÓMICO DOS EUA

Miguel de Carvalho<sup>(a,b)1</sup>, Paulo C. Rodrigues<sup>(b)</sup> e António Rua<sup>(c)</sup>

<sup>(a,b)</sup>CEAUL - Universidade de Lisboa

<sup>(b)</sup>CMA - Universidade Nova de Lisboa

<sup>(c)</sup>Banco de Portugal

A monitorização do desenvolvimento económico é uma actividade preponderante para a condução óptima do exercício político, nomeadamente para bancos centrais, autoridades fiscais e outros agentes económicos tais como intermediários financeiros, empresas e famílias. No entanto, a avaliação do ciclo económico não é uma tarefa trivial uma vez que a componente cíclica é uma variável não observada.

Este trabalho incide sobre o ciclo económico de uma das economias mais importantes do mundo - os EUA. Fazemos uso de métodos espectrais singulares de modo a decompor a medida mais ampla de actividade económica - o Produto Interno Bruto - em várias componentes de interesse. As características tipo band pass do filtro espectral singular são aqui exploradas de modo a estudar o ciclo económico dos EUA.

A componente cíclica obtida é testada através da comparação com os períodos de contracção dos EUA, datados pelo *US Business Cycle Dating Committee do National Bureau of Economic Research* (NBER). Além disso são ainda realizadas comparações com alguns dos métodos mais populares na literatura, nomeadamente os filtros Hodrick-Prescott e Baxter-King.

---

<sup>1</sup>O trabalho descrito neste resumo foi desenvolvido durante uma visita de Miguel de Carvalho ao Departamento de Estudos Económicos do Banco de Portugal. A opinião expressa neste trabalho é a dos autores e não coincide necessariamente com a posição do Banco de Portugal.

## O ÍNDICE DE CRUZAMENTOS: PROPRIEDADES E INFERÊNCIA

Ana Paula Martins

amartins@ubi.pt

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior

Para uma sucessão estacionária  $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n \geq 1}$ , o índice de cruzamentos  $\eta$  relaciona o limite do número médio de excedências  $\tau$  de níveis elevados  $u_n$  por  $X_1, \dots, X_n$  e o limite do número médio de cruzamentos  $\nu$ , do mesmo nível, através da relação  $\eta = \frac{\tau}{\nu}\theta$ , onde  $\theta$  é o índice extremal de  $\mathbf{X}$ . Este parâmetro introduzido por Ferreira (2006) é uma medida do agrupamento de cruzamentos ascendentes de um nível elevado pelas variáveis em  $\mathbf{X}$  e, mediante certas condições, pode ser aproximado pelo inverso da dimensão média dos grupos de cruzamentos.

Analizamos outras propriedades do índice de cruzamentos e apresentamos um estimador para este parâmetro, sob a validade de uma condição de dependência local.

## Referências

- Ferreira, H. (2006). The upcrossings index and the extremal index. *J. Appl. Prob.* **43**, 927-937.
- Ferreira, H. (2007). Runs of high values and the upcrossings index for a stationary sequenced. *Proceedings of the 56th Session of the International Statistical Institute*.
- Leadbetter, M.R. and Nandagopalan, S. (1989). On exceedance point processes for stationary sequences under mild oscillation restrictions. In *Extreme Value Theory: Proceedings, Oberwolfach 1987*, J. Hüsler and R-D. Reiss, Eds., Lecture Notes in Statistics **51**, 69-80. Springer-Verlag, Berlin.
- Nandagopalan, S. (1990). Multivariate Extremes and Estimation of the Extremal Index. PhD Thesis. University of North Carolina. Chapel Hill.
- Sebastião, J., Martins, A.P., Pereira, L.e Ferreira. H., (2010). Clustering of upcrossings of high values. *J. Statist. Plann. Inf.*, 140, 1003-1012



## UM CHUTO NA BIODIVERSIDADE: QUANDO A LIGA SAGRES ENCONTRA A ECOLOGIA

**Nuno Sepúlveda**

nunosep@gmail.com

Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa

Um dos grandes objectivos em Ecologia consiste em estimar o número de espécies a residir num determinado habitat através de uma amostra de dimensão limitada. Com este objectivo, é recorrente utilizar-se os conhecidos modelos poissonianos de abundâncias em que o número amostrado de indivíduos de uma determinada espécie segue uma distribuição de Poisson com uma taxa de amostragem que pode ela própria ser distribuída probabilisticamente. Nesta apresentação dá-se um chuto à biodiversidade para o campo do futebol, analisando a tabela dos marcadores da Liga Sagres da época 2009/2010 através dos modelos acima referidos. No presente cenário os jogadores são considerados como espécies e os seus golos marcados as respectivas abundâncias. A análise estatística visa então estimar o número de jogadores que alinharam nalgum jogo ao longo das jornadas da Liga e encontrar o melhor modelo para os dados. Para atingir este objectivo inferencial, utiliza-se o método de máxima verosimilhança através do pacote PAM para a linguagem R recentemente desenvolvido para a estimação da diversidade de receptores de linfócitos T.

## ESTIMAÇÃO SEMI-PARAMÉTRICA DE QUANTIS ELEVADOS USANDO O MÉTODO DOS MOMENTOS PONDERADOS DE PROBABILIDADE

**Frederico Caeiro<sup>†</sup> e Dora Prata Gomes**

<sup>†</sup> fac@fct.unl.pt

DM e CMA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Vamos admitir que  $F$  é um modelo com cauda de tipo Pareto, ou seja, que  $1 - F(x) \sim (C/x)^{1/\gamma}$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Dada uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de uma população com distribuição  $F$ , vamos denotar as estatísticas ordinais por  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ . Os estimadores clássicos do parâmetro de forma,  $\gamma$ , e do parâmetro de escala,  $C$ , baseados na amostra das maiores  $k + 1$  observações  $X_{n:n} \geq$

$X_{n-1:n} \geq \dots \geq X_{n-k:n}$  são os estimadores de Hill [3] e de Weissman [4], respectivamente. Estes estimadores possuem usualmente viés elevado, o que dificulta a escolha de número de estatísticas ordinais a utilizar na estimação. Por esta razão têm surgido na literatura novos estimadores com melhor comportamento que os estimadores clássicos. Recentemente Caeiro and Gomes [1] estudaram novos estimadores semi-paramétricos de  $\gamma$  e de  $C$  obtidos através do método dos momentos ponderados de probabilidade [2]. Esses estimadores apenas são válidos quando  $\gamma < 1$ .

Neste trabalho estudamos novos estimadores semi-paramétricos de  $\gamma$  e  $C$  obtidos através do método dos momentos ponderados de probabilidade, válidos para qualquer valor de  $\gamma$ . Com base nestes estimadores, apresentamos também um estimador de um quantil elevado  $\chi_p$ , um valor que é ultrapassado com probabilidade  $p = p_n \rightarrow 0$ .

Palavras-Chave: Estatísticas Ordinais, Estimação semi-paramétrica; Cauda pesada; Quantil elevado.

## Referências

- [1] Caeiro, F. and Gomes, M.I. (2010). Semi-Parametric Tail Inference through Probability-Weighted Moments. Submetido.
- [2] Greenwood, J. A., Landwehr, J. M., Matalas, N. C., and Wallis, J. R. (1979). Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressable in Inverse Form. *Water Resources Research*, 15, 1049-1054.
- [3] Hill, B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The Annals of Statistics*, 3, 1163-1174.
- [4] Weissman, I. (1978). Estimation of parameters and large quantiles based on the  $k$  largest observations. *J. Amer. Statist. Assoc.* **73**, 812-815.

## ALGUMAS PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DOS ESTIMADORES JACKKNIFE

**Luís Manuel Mendes da Costa**

Universidade de Aveiro - Instituto Superior de Contabilidade e Administração

Neste estudo procura-se realizar uma abordagem introdutória de algumas das propriedades assintóticas satisfeitas pelos estimadores obtidos com recurso a um dos mais populares métodos de reamostragem utilizados em estatística matemática, o Jackknife.

O método de estimação pontual do Jackknife, contrariamente a outras metodologias, não exige um modelo perfeitamente especificado, permitindo contudo obter estimadores com viés ou ordem de viés inferior ao do estimador, não cêntrico, inicial.

O princípio do método do Jackknife, cujo desenvolvimento pode ser atribuído a Tukey (1958), consiste em utilizar a amostra inicial repetidas vezes, suprimindo uma observação em cada uma das vezes, para obter vários valores para o estimador do parâmetro,  $\theta$ , a estimar.

Tais valores são em seguida usados para propor um valor “médio” para o parâmetro.

Esta técnica terá sido inspirada na pesquisa de valores aberrantes e permite, de certo modo, apreciar a contribuição de cada uma das observações para o valor do estimador.

Historicamente, as propriedades assintóticas do estimador Jackknife foram, pela primeira vez, sugeridas por Tukey (1958).

Este autor conjecturou que os pseudo-valores,  $J_i(\hat{\theta}_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , do Jackknife ordinário,  $J(\hat{\theta}_n)$ , poderiam ser considerados como variáveis aleatórias aproximadamente independentes e identicamente distribuídas e tendo aproximadamente a mesma variância que o estimador  $\sqrt{n}\hat{\theta}_n$ .

Sob aquela conjectura, é então natural pensar-se no estudo do comportamento assintótico da variável aleatória real

$$\frac{J(\hat{\theta}_n) - \theta}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n [J_i(\hat{\theta}_n) - J(\hat{\theta}_n)]^2}},$$

já que a variância de  $J(\hat{\theta}_n)$  pode ser aproximada por

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left[ J_i(\hat{\theta}_n) - J(\hat{\theta}_n) \right]^2.$$

Na abordagem do presente estudo, uma vez formulados os conceitos de Jackknife ordinário,  $J(\hat{\theta}_n)$ , e de Jackknife generalizado,  $G_R(\hat{\theta}_n)$ , e apresentado o método de Quenouille, serão expostos alguns resultados que nos permitem obter o comportamento assintótico da variável aleatória real

$$\frac{G_R(\hat{\theta}_n) - \theta}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left[ G_{R,i}(\hat{\theta}_n) - G_R(\hat{\theta}_n) \right]^2}},$$

no caso particular em que o parâmetro  $\theta$  é uma função da média da população em estudo.

Mais concretamente, abordaremos dois teoremas conducentes a um último teorema que toma a forma que se segue.

Teorema.

Seja  $(X_1, \dots, X_n)$  uma  $n$ -amostra de uma variável aleatória real,  $X$ , de média  $\mu$  e variância finita  $\sigma^2$ .

Consideremos  $\hat{\theta}_n = f(\bar{X}_n)$  como estimador de  $\theta = f(\mu)$ , em que  $f$  é uma função real de variável real tal que  $\frac{d}{dx}f$  e  $\frac{d^2}{dx^2}f$  são funções contínuas definidas numa vizinhança de  $\mu$ , com  $\frac{d}{dx}f(x)|_{x=\mu} \neq 0$ ,  $\frac{d^2}{dx^2}f(x)|_{x=\mu} \neq 0$ .

Suponhamos que se toma  $R(n) = O[(n-1)(1-R(n))]$  no estimador  $G_R(\hat{\theta}_n)$ .

Então tem-se

$$\left( \frac{n}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{R(n)}{1-R(n)} \frac{[G_R(\hat{\theta}_n) - \theta]}{\left\{ \sum_{i=1}^n [G_{R,i}(\hat{\theta}_n) - G_R(\hat{\theta}_n)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{L} N(0, 1),$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

## UM MODELO SEMI-PARAMÉTRICO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA

**José António Santos<sup>(a)</sup> e M. Manuela Neves<sup>(b)</sup>**

<sup>(a)</sup>ISEGI-UNL, <sup>(b)</sup>ISA-UTL e CEAUL

A verosimilhança local é um conceito que foi sugerido por Tibshirani e Hastie (1987). Staniswalis (1989), e Fan, Heckman e Wand (1995) estenderam este conceito ao alisador de núcleo e à regressão polinomial local de núcleo.

Neste trabalho, apresenta-se um estimador de máxima verosimilhança local, tendo como base a regressão logística. Pretende-se que este estimador semi-paramétrico seja uma alternativa ao modelo (paramétrico) de regressão logística, não dependente de condições de regularidade nem da correcta especificação do modelo.

Para simplificar, considere-se apenas um regressor contínuo,  $X$ . A vizinhança local é estabelecida pela largura de banda,  $h$ , e pela função núcleo,  $K(\cdot)$ . Considere-se uma variável aleatória binária,  $Y$ , com suporte  $\{0, 1\}$ . No âmbito da regressão logística, a média condicional de  $Y$  é dada por

$$E[Y|X = x_i] = p_i = \frac{\exp\{m(x_i)\}}{1 + \exp\{m(x_i)\}},$$

em que  $m(x_i)$  é uma função desconhecida de interesse a ser estimada por alisamento polinomial local. Considerando, sob determinadas condições de regularidade, o desenvolvimento de Taylor de grau um como uma aproximação de  $m(x_i)$ , em que  $x_i$  está numa vizinhança de  $x$ , tem-se

$$\lambda(x_i) \approx \exp[\beta_0 + \beta_1(x_i - x)].$$

No âmbito da regressão logística, o logaritmo da função verosimilhança local é dado por

$$\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1 | \mathbf{x}, \mathbf{y}, x, h) = h^{-1} \sum_{i=1}^n \{(y_i \log p_i + (1 - y_i) \log(1 - p_i)) K\{(x - x_i)/h\}\}.$$

O estimador de máxima verosimilhança local com base na regressão logística é obtido pela solução das condições de primeira ordem para o máximo da função log-verosimilhança:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left( y_i - \frac{\exp[\beta_0 + \beta_1(x_i - x)]}{1 + \exp[\beta_0 + \beta_1(x_i - x)]} \right) K\{(x - x_i)/h\} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ x_i - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Há o problema da selecção da largura de banda. Dois métodos possíveis são a partição da amostra em duas subamostras, uma subamostra de treino (ou aprendizagem) e uma amostra de validação (ou teste), ou a validação cruzada (Gyorfi *et al.*, 2002), o que significa a utilização de uma parte da amostra para obter informação acerca da outra. O viés, a variância e a distribuição assintótica podem ver-se em Santos (2005) e Santos e Neves (2007). Os procedimentos de estimação e de inferência podem ver-se em Fan, Farmen e Gijbels (1998).

Este trabalho é resultado do progresso entretanto obtido dos trabalhos de Santos (2005) e Santos e Neves (2007). Este trabalho é ilustrado com dois exemplos: modelação de dados de HIV fornecidos por van den Broek (1995) e a modelação de dados de poluição marinha por TBT, que origina a ocorrência de imposexo (Rato *et al.*, 2009)

### Bibliografia

van den Broek, J. (1995). A score test for zero inflation in a Poisson distribution. *Biometrics*, 51: 738-43.

Fan, J., Heckman, N. e Wand, M. (1995). Local polynomial kernel regression for generalized linear models and quasi-likelihood functions. *Journal of the American Statistical Association*, 90: 141-50.

Fan, J., Farmen, M. e Gijbels, I. (1998). Local maximum likelihood estimation and inference. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 60: 591-608.

Györfi, L., Kohler, M., Krzyzak, A. e Walk, H. (2002). *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*. Springer-Verlag.

Rato, M., Ferreira, N., Santos, J. e Barroso, C. (2009). Temporal evolution of imposex in *Nassarius reticulatus* (L.) along the Portuguese coast: the efficacy of EC regulation 782/2003. *Journal of Environmental Monitoring*, 100: 100-107.

Santos, J. (2005). Estimação Não Paramétrica em Modelos de Regressão de Dados de Contagem com Excesso de Zeros. Tese de Doutoramento, ISA/Universidade Técnica de Lisboa.

Santos, J. e Neves, M. (2007). A Local Maximum Likelihood Estimator for Logistic Regression. In *Proceedings of the 22nd International Workshop on Statistical Modelling*, Barcelona, pg. 536-539.

Staniswalis, J. (1989). The kernel estimate of a regression function in likelihood-based models. *Journal of the American Statistical Association*, 84: 276-83.

Tibshirani, R. e Hastie, T. (1987). Local likelihood estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 82: 559-67.

ESTIMATION OF A QUARTERLY MODEL WITH ANNUAL  
SAMPLE SELECTION**Montezuma Dumangane e Nicoletta Rosati**

mdumangane@concorrenca.pt, nicoletta@iseg.utl.pt

Portuguese Competition Authority, Lisbon, Portugal

CEMAPRE and ISEG, Technical University of Lisbon, Lisbon, Portugal

This work aims at developing a semi-parametric methodology for the estimation of a non-linear quarterly panel data model with annual sample selection.

A random annual sample is used to build a semi-parametric sample selection model that allows consistent estimation of the quarterly parameters from the non-random samples. The correction of the quarterly estimates is achieved through an extension of the model introduced by Kiriazidou [1].

The extension is two-fold. First, the non-negative nature of the data leads to the development of a non-linear model. In fact, as pointed out in Santos Silva and Tenreyro [2], applying a linear model to the log-transformed data, despite being common practice, is not recommended as induces inconsistency of the estimates of at least the intercept parameter. The second extension is necessary due to the selection mechanism, since the non-random selection of the quarterly observations is done annually, therefore the frequency of the data and of the selection do not coincide.

The proposed estimator is obtained through a two-step procedure with semi-parametric weights, where the selection equation is based on a continuous random variable, allowing for unobserved heterogeneity. The methodology is applied to the estimation of a quarterly model for sales, using a Portuguese quarterly firms panel survey.

## Referências

- [1] E. Kiriazidou, Estimation of a panel data sample selection model, *Econometrica*, **65**, 1335–1364 (1997).
- [2] J. M. C. Santos Silva and S. Tenreyro, The log of gravity, *The Review of Economics and Statistics*, **88**, 641–658 (2006).

## 6 Curso Acreditado

### 6.1 Introdução

O curso de *Tecnologias no Ensino da Matemática* funcionará tendo como pano de fundo o Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática e o 3<sup>a</sup> Mat-Oeste: Matemática na Região Oeste, a realizar na Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria nos dias 8, 9 e 10 de Julho de 2010. O curso está devidamente acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua (CCPFC), e resulta da colaboração entre o Centro de Formação da SPM e o Centro de Competência “Entre Mar e Serra”.

Destinatários: Professores de matemática do ensino básico e secundário. Duração do Curso: 15 horas (0,6 créditos) e está dividido em 3 blocos distintos:

1. Mat-Oeste (3,5 horas)

O Mat-Oeste – Matemática na Região Oeste – é um evento organizado pelo Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, com o objectivo de promover a divulgação, discussão e partilha de ideias e experiências sobre temas de matemática. É dirigido a docentes de todos os níveis de ensino. Este ano terá lugar a 3<sup>a</sup> edição, incorporada no Encontro Nacional da SPM e será dedicada ao tema da Geometria.

2. Dois Cursos de Formação de 3h15m (totalizando 6,5 horas), a escolher duas de quatro opções abaixo indicadas.
3. Mesa redonda do Ensino + Sessões temáticas do Ensino (totalizando 5 horas)



## 6.2 Sessões Mat–Oeste

09:50-10:30 Paulo Almeida (Universidade Técnica de Lisboa):  
*Geometria Não Comutativa e Aritmética: uma introdução*

10:45-11:25 Maria Elfrida Ralha (Universidade do Minho):  
*Geometria José Anastácio da Cunha (1744-1787)*  
*e os seus Princípios de Geometria tirados dos de Euclides:*  
*De onde vimós? Para onde vamos?...*

11:25-12:00 Ana Breda (Universidade de Aveiro):  
*Pavimentações planares e esféricas.*  
*Simetria: um poder aglutinador*

12:00-13:00 Sessão de posters da 2.<sup>a</sup> edição do Prémio Doutor  
Pedro Matos

### 6.3 Cursos de Formação

9 de Julho, 6<sup>a</sup> feira, 14:30-17:45

- *Matemática com Quadros Interactivos*  
Formador: Carlos Manuel Ferreira Pereira dos Santos
- *Geometria Plana*  
Formador: Pedro Manuel Leal Alberto
- *Sensores e Modelação*  
Formador: Maria da Conceição Ferreira dos Santos

10 de Julho, Sábado, 09:00-12:15

- *Matemática com Quadros Interactivos*  
Formador: Hilda de Pablo Leonardo
- *Matemática no Excel*  
Formador: Alda Cristina Jesus Valentim Nunes de Carvalho
- *Matemática no Excel*  
Formador: Carlos Manuel Ferreira Pereira dos Santos
- *Geometria Plana*  
Formador: Pedro Manuel Leal Alberto

## MATEMÁTICA COM QUADROS INTERATIVOS

Centro de Formação da SPM

1. Potencialidades pedagógicas e didáticas do quadro interativo no ensino da Matemática;
2. Menus e ferramentas do quadro interativo;
3. Interactividade: quadro interativo / computador:
4. Exploração de documentos em vários formatos (apresentações ppt e e.books, por exemplo);
5. Software específico (Geometria . Cabri3D, Cinderella, GeoGebra, GSP ou Poly . e Funções . Ncalc ou Winplot);
6. Jogos e testes interactivos (QuizFaber ou HotPotatoes).

## MATEMÁTICA NO EXCEL

Centro de Formação da SPM

1. Exploração inicial do software;
2. Análise e construção de exemplos propostos: na estatística, nas MACS, nas probabilidades, em outros temas.

## GEOMETRIA PLANA

Centro de Competência “Entre Mar e Serra”

Tema único: Utilização variado de software geométrico:  
GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Cabri.

## SENSORES E MODELAÇÃO

Centro de Competência “Entre Mar e Serra”

1. Sensores de movimento: actividades várias;
2. Sensores de temperatura: actividades várias.